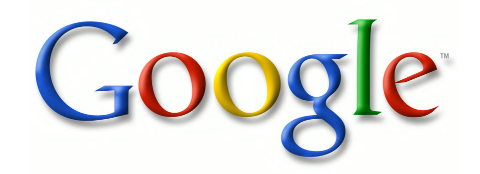
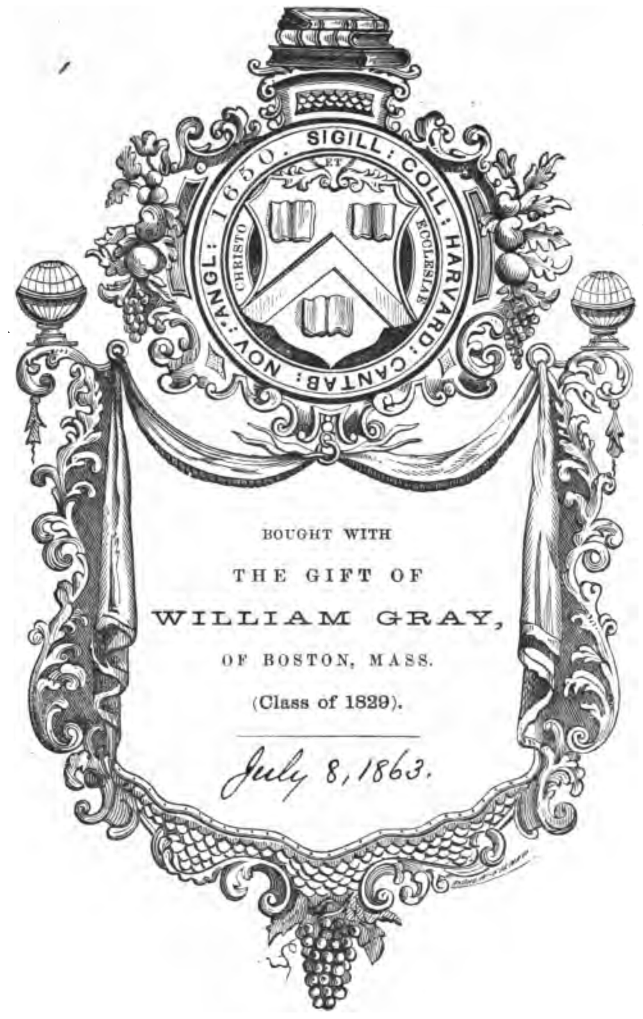
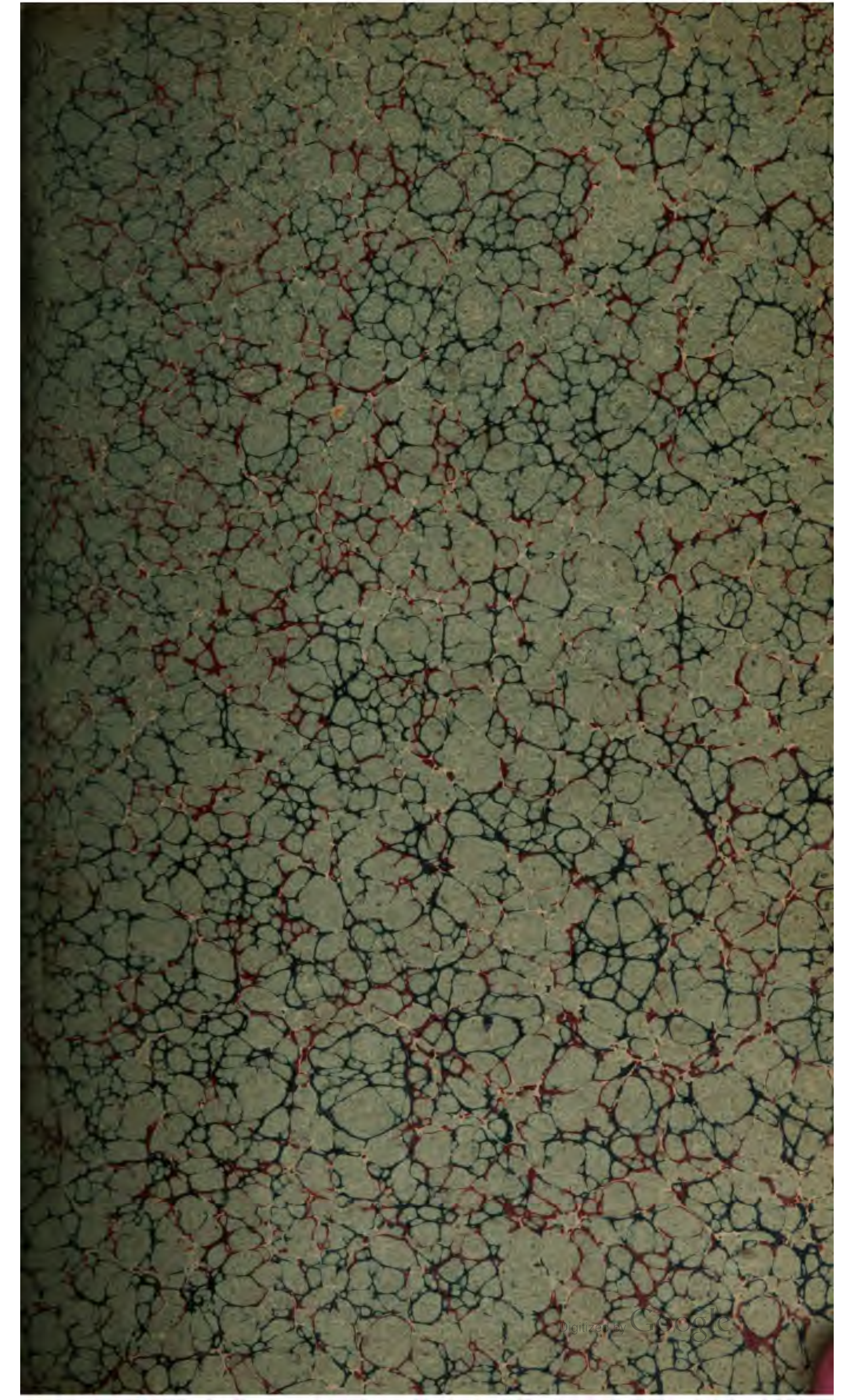



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



ROYAUME DES PAYS-BAS.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE,

PUBLIÉE

PAR A. QUETELET,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES, PROFESSEUR AU MUSÉE; MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES ET DE L'INSTITUT DES PAYS-BAS; DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATIQUE DE PARIS, DES SOCIÉTÉS DE GAND, LIÉGE, ROTTERDAM, LA HAYE, CAMBRAI, ETC.

VI[e] LIVRAISON. — TOME IV.



BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE,
RUE DE LA MONTAGNE, N° 1023.

1828.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Le Rédacteur de ce Journal s'astreint à la seule obligation de publier tous les ans un volume, format in-8°, d'environ 24 à 25 feuilles, y compris les planches, par livraison de trois, quatre ou cinq feuilles. Le prix de l'abonnement est de 7 *florins des Pays-Bas, pour le Royaume, et* 9 *fl.* (19 *fr.* 5 *c.*) *pour l'étranger*. On souscrit *à Bruxelles*, chez P. J. De Mat, imprimeur-libraire, Grand'Place, et chez Berthot, libraire, Marché au Bois. Les mémoires, notices, lettres, réclamations, seront adressés, *port franc*, au Rédacteur ou chez M. P. J. De Mat. On souscrit en France, chez Malher et Comp., Passage de la rue Dauphine et chez Bachelier.

LISTE DES CORRESPONDANS DANS LES DIFFÉRENTES VILLES DU ROYAUME ET A L'ÉTRANGER.

Amsterdam, les frères Van Cleef.
Anvers, Ancelle.
Arnhem, Muller.
Bréda, B. F. Hollingérus Pypers.
Bruges, Bogaert-Dumortier.
Bruxelles, De Mat et Berthot.
Courtrai, le directeur des Postes-aux-Lettres.
Dordrecht, Blussé et Van Braam.
Groningue, Rommeling.
Gand, Vassas.
Harlem, Veuve A. Loosjes.
La Haye, les Freres Van Cleef.
Leyde, Veuve Cyfver.
Liége, Desoër.
Louvain, Vanlinthout et Vandenzande.
Maestricht, Mme Ve Lefebvre-Renard ci-devant Collardin.
Ostende, Vermeirsch.
Rotterdam, Thompson, frères.
Tournai, Casterman-Dieu.
Utrecht, Altheer, Imp. de l'Université.
Ipres, Depoorter Vanegerow.
Paris, Malher et Comp.; Bachelier; J. B. Baillière; Béchet jeune; Crevot; Crochard; Gabon et Méquignon-Marvis.

LIVRES NOUVEAUX.

Essai sur les bateaux à vapeur, appliqués à la navigation intérieure et maritime de l'Europe, sur les bateaux *aqua-moteurs* et particulièrement sur le tonnage par la vapeur, ou rémorque à points fixes, accompagné de considérations sur les transports par terre et par eau, et sur les chemins en fer; par *Tourasse* et *Mellet,* ingénieurs. Vol. in-4° de 248 pages avec 8 pl., à Paris, chez *Malher* et *compe*, et à Bruxelles, chez *Berthot*. 1828.

Traité de Chimie appliquée aux arts, par M. *Dumas*. in-8° de près de 700 pages, avec atlas, à Paris, chez *Béchet* jeune, et à Bruxelles, au dépôt général de la librairie médicale française. 1828.

L'ouvrage se composera de 4 volumes; le premier est en vente. Prix 8 francs.

Traité général de banques et d'arbitrages, par *J. H. Cornet*. Chez les principaux libraires du royaume. in-8° de 242 p. 1828.

Annales mathématiques pures et appliquées; ouvrage périodique, rédigé par M. *J. D. Gergonne*, etc. Tome XIX, N° 6, décembre. in-4°, de l'imprimerie de *Durand-Belle*, à Nismes.

Cette livraison contient les articles suivans : Recherches sur les projections stéréographiques et sur diverses propriétés générales des surfaces du second ordre, par M. *Chasles*. — Solution de deux des six problèmes de géométrie énoncés dans le Ve numéro du précédent volume, par un abonné. — Énoncé de deux théorèmes et de douze problèmes dont on propose de donner les démonstration et solution.

Journal für die reine und angewandte matematik, par M. *A. L Crelle,* tome III, 3e livraison. in-4° avec 2 planches, chez *Reimer,* à Berlin.

On trouve dans cette livraison les articles suivans : Mémoire de M. *Poncelet,* sur les centres des moyennes harmoniques. — La discussion d'un paradoxe relatif aux tétraèdres inscrits et circonscrits les uns aux autres, par M. *Mœbius*. — Les démonstrations et solutions de divers théorèmes et problèmes proposés dans les livraisons précédentes. — La suite d'un mémoire sur les fonctions elliptiques, par M. *Jacobi,* de Kœnigsberg. — La démonstration de deux théorèmes des *Disquisitiones Arithmeticæ,* de M. *Gauss,* par M. *Clausen*. — Un théorème proposé à démontrer, par M. le docteur *Hellerung*.

TABLE DES MATIÈRES.

Mathématiques Élémentaires.

fait

Mathématiques transcendantes.

Mathématiques appliquées.

Revue scientifique.

NOTA. Nous sommes forcés de renvoyer à un autre volume la continuation de l'article observatoires d'Angleterre, et l'insertion de différentes pièces qui nous ont été adressées successivement.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Un géomètre veut partager l'angle ACB, *sur le terrain, en deux parties égales* (fig. 1), *il n'a pour instrument qu'une équerre, qui vient d'être presqu'écrasée, et dont par suite l'angle qu'il peut encore observer, lui est inconnu.* (*)

ACB...... angle à diviser en deux parties égales :
V angle qu'on peut encore observer avec l'instrument.

1° On prendra sur AC un point arbitraire D, on placera successivement l'instrument dans les quatre positions marquées (1), et l'on obtiendra ainsi par l'intersection des rayons visuels les points E, E';

2° On marchera sur EE' ou sur son prolongement, de manière à ce que l'un des côtés de l'angle V, reste dans la direction EE'; on marchera ainsi jusqu'à ce que l'autre côté passe par le point C. On aura aussi le point F où l'instrument aura la position marquée (2);

3° On se transportera en C, l'on y placera l'instrument dans la position (3), et l'on obtiendra CG, parallèle à EF et

(*) Ce problème a été résolu dans le premier vol. de la *Correspondance*, page 254, mais d'une manière moins générale. La solution que nous présentons ici, est de M. *De Behr*, ingénieur en chef du waterstaat et ancien élève de l'École Polytechnique. Nous ne croyons pas être indiscret en désignant aussi M. *De Behr*, comme l'auteur d'une lettre très-intéressante sur la *pression de la vapeur*, insérée dans le IIIe vol., page 198. A. Q.

perpendiculaire à CA, ensuite CH, de manière que l'angle HCG = GCF ;

4° Se transportant en K, plaçant l'instrument suivant la position (4), on aura le point L, et par suite le point M, intersection des rayons visuels LF et CH.

Il est évident que CF = CM et que ML = LF ;

5° On placera l'angle V successivement sur les deux côtés de l'angle BCA, de manière à ce que les rayons visuels, formant l'angle V, passent par les points M et F, conformément aux positions marquées (5) (5) ; on aura ainsi lespoints A′ B′.

Avec un peu d'attention, on se convaincra que ces points sont à égales distances de C ; parce qu'ils sont situés sur le segment capable de l'angle V, décrit sur FM ; parce que l'angle MCF étant double de V, et ayant son sommet sur une perpendiculaire élevée sur le milieu de MF, ne peut avoir son sommet qu'au centre du segment circulaire ;

6° Enfin, portant successivement l'instrument en A′ et en B′, et le plaçant comme il est indiqué en (6) ; on aura le point X, situé sur la ligne qui partage l'angle ACB en deux parties égales.

On donne dans un plan un angle et un point, et l'on demande de faire passer par le point une droite qui coupe les côtés de l'angle, de manière que l'aire interceptée soit de grandeur donnée. Problème proposé page 180 du IIIe vol. (*)

Si on se rappelle : 1° que toutes les tangentes de l'hyperbole interceptent sur ses asymptotes des triangles équivalens ; 2° que les perpendiculaires abaissées des foyers sur ces mêmes tangentes, ont leurs pieds sur la circonférence décrite sur le

(*) Nous avons extrait cette solution d'une lettre de M. *Bobillier;* ce savant nous a communiqué en même temps une autre solution, qu'il a vue dans un ancien ouvrage, dont il ne se rappelle pas le titre et qui ressemble beaucoup à celle que nous avons insérée dans le cahier précédent.

grand axe comme diamètre ; on a sur-le-champ la construction qui suit :

On fait d'abord (*fig.* 2) un triangle isocèle DOE, équivalent à l'aire assignée ; du point O comme centre, avec un rayon égal à sa hauteur OK, on décrit une circonférence de cercle et l'on prend OF = OD ; sur la droite qui unit le point F au point donné C, considérée comme diamètre, on décrit une autre circonférence qui coupe la première en *m* et *n* ; les droites *cm*, *cn*, résolvent l'une et l'autre la question. En construisant le triangle isocèle dans l'angle AOx, on obtiendrait deux autres solutions ; ce problème est donc susceptible de quatre solutions, dont deux au moins sont réelles.

On sait que les parallélipipèdes construits sur les diamètres conjugués d'une surface du second ordre sont équivalens. Or, dans l'hyperboloïde à deux nappes, les diamètres qui correspondent à un point quelconque, ne sont autres que la droite qui unit le centre à ce point, et deux des diamètres conjugués de la section faite dans le cône asymptotique par le plan tangent en ce même point, delà il résulte que *tous les plans tangens d'un hyperboloïde à deux nappes, interceptent sur le cône asymptotique des volumes équivalens.*

Ainsi, en modifiant un peu la construction précédente, et en ne faisant usage que de la sphère, on pourra mener un plan qui passe par une droite fixe, et qui intercepte sur une surface conique de révolution donnée un volume assigné.

Si une droite divise deux des côtés opposés d'un quadrilatère gauche en parties proportionnelles ; toute droite qui la coupera, ainsi que les deux autres côtés du quadrilatère, sera divisée par elle dans le même rapport ; par M. Lévy, ancien élève de l'École Normale de France.

Soit ABCD un quadrilatère gauche (*fig.* 3), GH une ligne divisant les côtés CD, AB dans le même rapport, et EF une ligne qui coupe à la fois les trois lignes AC, GH et DB. On aura EI : IF : : CG : GD *ou* : : AH : HB.

En effet, par la ligne AB, menons un plan quelconque, et par les points E, C, D, F, des parallèles à GH qui rencontrent le plan aux points L, M, N, Q, Menons les lignes MHN, LHO, qui sont évidemment des lignes droites, étant les intersections du plan mené par AB, avec les plans MCDN, LEFO. Or, MH : HN : : CG : GO : : AH : HB, donc AM est parallèle à BN, donc LH : HO : : AH : HB, mais LH : HO : : EI : IF, donc AH : HB : : EI : IF. *C. Q. F. D.* (1)

On peut déduire bien simplement de cette proposition l'élégant théorème relatif, au tétraèdre qui est démontré dans la IV[e] livraison du tome III de la *Correspondance*. En effet, soit ABCD un tétraèdre quelconque; EF, la ligne qui joint les milieux des côtés AC, BD (*fig.* 4). La proposition est d'abord évidente pour le plan mené suivant AC et DE. Et par conséquent, pour la prouver pour un autre plan quelconque EGFH, il suffit de démontrer que les deux tétraèdres AGEF, EFHC sont égaux. Or, ils ont des bases égales AEF, ECF. Reste à prouver que les hauteurs le sont aussi, mais en menant GH, il est évident qu'elles sont dans le rapport des lignes GI, IH, et que celles-ci d'après le théorème précédent sont égales, en considérant les lignes AB, CD, AC, BD comme les quatre côtés d'un quadrilatère gauche.

On a une pièce de bois, de la forme d'une pyramide tronquée à bases parallèles, et l'on demande de la couper, par un plan parallèlement aux bases, de manière que les deux portions soient dans un rapport donné. Problème énoncé à la pag. 219 du tom. III de la *Correspondance Mathématique et Physique*; par J.-N. Noel, Principal de l'Athénée de Luxembourg.

Soient a et b les aires des bases du tronc proposé, leurs

---

(1) Il résulte de ce théorème que, lorsque des droites s'appuient sur trois droites dans l'espace, non situées dans le même plan, elles sont ou toutes coupées dans le même rapport, ou toutes coupées dans des rapports différens.

plans étant ABC et DEF (*fig.* 5); soit v le volume de ce tronc, et h sa hauteur EO; x l'aire de la section demandée, dont le plan est HGI. D'après l'énoncé, les portions AI et HF du tronc proposé, doivent avoir le rapport donné m; on a donc $HF = AI \times m$ et $HF + AI = v$, d'où l'on tire

$$AI = \frac{v}{m+1}.$$

Soit y la hauteur GK du tronc AI, son volume sera donc $\frac{1}{3} y(a + x + \sqrt{ax})$, et on aura l'équation

$$\tfrac{1}{3} y(a + x + \sqrt{ax}) = \frac{v}{m+1} \ldots (1)$$

Menant EM et GN parallèles à DA, et posant $AB = c$, $BM = d$, les triangles semblables BEO et BGK, BEM et BGN, donneront

$$h : y :: BE : BG :: BM : BN :: d : BN;$$

d'où résultent

$$BN = \frac{dy}{h} \text{ et } BG = \frac{y}{h} \times BE.$$

Les polygones semblables a et x fournissent $a : x :: \overline{AB}^2 : \overline{HG}^2$, ou $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: AB : HG$; d'où il vient $\sqrt{a} - \sqrt{x} : \sqrt{a} :: BN : c$, ou $\sqrt{a} - \sqrt{x} : \sqrt{a} :: \frac{dy}{h} : c$, et enfin

$$y = \frac{ch}{d\sqrt{a}}(\sqrt{a} - \sqrt{x}).$$

Cette valeur substituée dans l'équation (1), donne, après les réductions faites,

$$x = \sqrt[3]{a\left[a - \frac{3dv}{ch(m+1)}\right]^2}.$$

Avec cette valeur, celle de y se réduit; et, substituant cette dernière dans $BG = BE \times \frac{y}{h}$, on aura, pour déterminer le point

G de la section cherchée, la formule

$$BG = BE \times \frac{c}{d}\left\{-1+\sqrt[3]{1-\frac{3dv}{ch(m+1)}}\right\}\ldots(2)$$

Cette formule s'applique à une pyramide, en y faisant $d=c$; et à un prisme, en posant $d=o$. Mais alors il vient $BG=\frac{0}{0}$, tandis qu'on doit avoir $BG=\frac{BE}{m+1}$.

Prenant successivement $m=1, 2, 3, 4$, etc., dans la formule (2), on aura successivement les formules pour diviser le tronc proposé en 2, 3, 4, 5, etc., portions équivalentes.

Le problème que l'on vient de résoudre conduit naturellement à celui-ci : *couper un cône tronqué en deux portions qui soient dans un rapport donné* m, *par un plan parallèle à celui des bases.*

Soit ABCD le trapèze qui, en tournant autour de sa hauteur $CB=h$, décrit le cône tronqué proposé (*fig.* 6). Soient les rayons des bases $AB=r$, et $CD=r'$; soit $IH=x$ le rayon de la section demandée, et posons $AD=c$. D'après l'énoncé, les portions décrites par les trapèzes HC et AI, ont le rapport donné m; on a donc, pour le volume de la portion décrite par AI, $\frac{v}{m+1}$, v désignant le volume du cône tronqué proposé. Or, ce volume, comme on sait, a pour mesure :

$$\frac{\pi h}{3}(r^2+r'^2+rr');$$

et, si l'on désigne par y la hauteur BI du trapèze AI, on aura, pour le volume décrit par ce trapèze, $\frac{\pi y}{3}(r^2+x^2+rx)$. Il vient par conséquent

$$\tfrac{1}{3}\pi y\,(r^2+x^2+rx)=\frac{\pi h(r^2+r'^2+rr')}{3(m+1)}\ldots\ldots(3)$$

Menant DM et HN parallèles à CB, les deux triangles semblables ADM et AHN donneront

$$h:y::r-r':r-x::c:AH;$$

d'où l'on déduit

$$y=\frac{h}{r-r'}(r-x) \quad \text{et} \quad AH=\frac{c}{r-r'}(r-x).$$

Ces équations et l'équation (3) donnent, pour déterminer le point H de la section demandée la formule,

$$AH=\frac{c}{r-r'}\left\{r-\sqrt[3]{\frac{mr^3+r'^3}{m+1}}\right\}.$$

Pour le cône entier, $r'=o$ et la valeur de AH, devient plus simple. Pour le cylindre, $r'=r$ et $AH=\frac{0}{0}$. Mais dans ce cas, il n'y a pas d'indétermination; car la valeur de AH est alors $AH=\frac{c}{m+1}$.

Théorèmes sur le nombre des diagonales des polygones, et sur les angles que font n *droites en se coupant.*

M. *Meyer*, régent au collége d'Echternach, en nous adressant quelques formules trigonométriques connues, auxquelles il était parvenu par voie d'induction, nous a envoyé en même temps quelques recherches de M. *Hardt*, jeune élève qui paraît annoncer d'heureuses dispositions pour les sciences. Nous donnerons les suivantes comme étant moins connues.

Le nombre n *des côtés d'un polygone égale la différence entre les nombres des diagonales qu'on peut mener dans deux*

polygones, qui ont un nombre de côtés égal à n + 1 *et à* n + 2.

Par la formule connue qui donne toutes les diagonales qu'on peut mener dans un polygone, on aura pour déterminer les diagonales qu'on peut mener dans les polygones de $n+2$ et $n+1$ côtés,

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)(n-2)}{2};$$

en prenant la différence de ces deux quantités, et en réduisant, on trouve pour valeur n, donc, etc.

Le maximum du nombre d'angles que l'on peut former avec n *droites est* 2 n (n — 1).

Pour que 2, 3, 4, 5, etc., droites fassent le maximum d'angles, il faut que la 2ᵉ coupe la 1ʳᵉ; la 3ᵉ les deux premières; la 4ᵉ les trois premières; la 5ᵉ les quatre premières, et en général la $n^{\text{ième}}$ les $n-1$ premières. Si l'on observe de plus qu'autour de chaque point d'intersection, il se trouve quatre angles, en comptant tous ces angles, on aura pour somme l'ensemble des termes de la progression suivante :

$$4\,(1+2+3+4+\ldots\ldots+n-1)$$

mais la somme de ces termes est égale à $4\,\frac{n\,(n-1)}{2}$; ou bien $2\,n\,(n-1)$; donc, etc.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

Mémoire sur les propriétés polaires de trois courbes planes, situées sur une surface du second ordre, adressé au rédacteur par M. Théodore Olivier, ancien élève de l'École Polytechnique, et ancien Officier d'artillerie.

Je désigne la surface du second ordre par Σ;

Je désigne par $\begin{cases} P' \text{ la plan coupant } \Sigma, \text{ suivant une courbe } c' \\ P'' \quad — \quad — \quad — \quad — \quad c'' \\ P''' \quad — \quad — \quad — \quad — \quad c''' \end{cases}$

Les trois plans P', P'', P''', se coupant en un point que je désigne par p.

Je suppose que les trois courbes n'ont aucuns points communs, et que le point p soit extérieur, par rapport à la surface Σ, c'est-à-dire, tellement situé dans l'espace que l'on puisse y faire passer un plan tangent à Σ.

J'ai démontré, dans le n° III du tome IIIe de la *Correspondance Mathématique* des Pays-Bas, que, *par deux sections planes d'une surface du second ordre, l'on pourra toujours faire passer deux surfaces coniques.*

Par conséquent, l'on pourra envelopper deux à deux, les trois courbes c', c'', c''', par six cônes.

Je désigne par
- $E'_{\prime\prime}$ et $J'_{\prime\prime}$ les sommets des deux cônes enveloppant les courbes. . . . . . . c' et c''
- $E'_{\prime\prime\prime}$ et $J'_{\prime\prime\prime}$ — — — — c' et c'''
- $E''_{\prime\prime\prime}$ et $J''_{\prime\prime\prime}$ — — — — c'' et c'''

Désignant par la lettre E, accentuée diversement, le sommet d'un cône extérieur, et par la lettre J, accentuée aussi diversement, le sommet d'un cône intérieur.

Par les deux sommets $E'_{\prime\prime}$ et $E'_{\prime\prime\prime}$, je pourrai mener deux plans tangens communs aux deux cônes, ayant pour base commune la courbe c'.

Chacun de ces deux plans tangens coupera évidemment, la surface Σ, suivant deux courbes tangentes, à la fois, aux trois courbes c', c'', c'''.

Les trois sommets $E'_{\prime\prime}$, $E'_{\prime\prime}$, $E''_{\prime\prime\prime}$, seront donc sur une ligne droite, que je désigne par E.

L'on démontrerait de la même manière que

Les trois sommets
- $J'_{\prime\prime}$ $J''_{\prime\prime\prime}$ $E'_{\prime\prime\prime}$ sont sur une droite I'.
- $J'_{\prime\prime\prime}$ $J''_{\prime\prime\prime}$ $E'_{\prime\prime}$ — — I''.
- $J'_{\prime\prime}$ $J'_{\prime\prime\prime}$ $E''_{\prime\prime\prime}$ — — I'''.

Je désigne par
- $L'_{\prime\prime}$ la droite intersection des deux plans P' et P''
- $L'_{\prime\prime\prime}$ — — — — — P' et P'''
- $L''_{\prime\prime\prime}$ — — — — — P'' et P'''

De ce que les sommets des six cônes enveloppes, sont, trois à trois, en ligne droite, j'en conclus que ces six sommets sont situés sur un plan unique; et, dès lors, je puis énoncer le théorème suivant :

Trois sections planes et arbitraires, d'une surface du second ordre, pourront en général être enveloppées, deux à deux, par six cônes, dont les sommets seront distribués, trois à trois, sur quatre droites situées dans un plan unique, et l'une de ces droites contiendra les trois sommets des cônes extérieurs.

Je désigne par P le plan qui contient les sommets des cônes enveloppes.

J'ai démontré dans le n° III du tom. III° de la *Correspondance* déjà citée que, si, par un point arbitrairement choisi sur la droite $L'_{,,}$, l'on menait deux plans tangens au cône $E'_{,,}$ (désignant le cône par son sommet), et deux plans tangens au cône $J'_{,,}$, les quatre points de contact, situés deux sur la courbe c', et deux sur la courbe c'', déterminaient un quadrilatère plan, dont les diagonales se croisaient au sommet $J'_{,,}$, dont deux côtés opposés, prolongés, se coupaient en $E'_{,,}$, et dont les deux autres côtés opposés, prolongés, allaient se couper sur la droite $E'_{,,}$.

Si donc du point p je mène :

deux tangentes à $\begin{cases} c' & \text{désignant par } m' \text{ et } n', \text{ les points de contact} \\ c'' & \text{— — } m'' \text{ et } n'', \text{ — —} \\ c''' & \text{— — } m''' \text{ et } n''', \text{ — —;} \end{cases}$

les quatre points m', n', m'', n'', formeront un quadrilatère plan, dans lequel deux côtés opposés passeront par le sommet $E'_{,}$; les diagonales se croiseront au sommet $J'_{,,}$, et les deux autres côtés opposés se couperont sur la droite $L'_{,,}$ en un point que je désigne par $l'_{,,}$.

Les quatre points m', n', m''', n''', formeront aussi, un quadrilatère plan dans lequel :

Deux côtés opposés passeront par le sommet $E'_{,,,}$.

Les diagonales se croiseront au sommet $J'_{,,,}$.

Et les deux autres côtés opposés se couperont sur la droite $L'_{,,,}$ au point $l'_{,,,}$.

Enfin, les quatre points m'', n'', m''', n''', formeront un quadrilatère plan, dans lequel :

Deux côtés opposés passeront par le sommet $E''_{,,,}$.

Les diagonales se croiseront au sommet $J''_{,,,}$.

Et les deux autres côtés opposés se couperont sur la droite $L''_{,,,}$ au point $l''_{,,,}$.

Il est évident que les trois points $l'_{,,}$, $l'_{,,,}$, $l''_{,,,}$, sont situés sur le plan P, et sont les sommets du triangle formé par les trois cordes $m'n'$, $m''n''$, $m'''n'''$, prolongées ; et que les quatre points

m', m'', n', n'', sont sur la courbe C, section de la surface Σ, par le plan P.

Le plan tangent à la surface Σ, au point m', passera par les tangentes à deux sections faites, en ce point, dans la surface.

Ainsi le plan tangent en m', sera déterminé par la droite $m'p$, tangente en m' à la courbe C′, et par la tangente en m' à la courbe C.

L'on aura de même :

Le plan tangent à Σ au point	n'	passant par	$n'p$	tangente à la courbe	C′.
	m''	—	$m''p$	—	C″.
	n''	—	$n''p$		
	m'''	—	$m'''p$	—	C‴.
	n'''	—	$n'''p$		

Par le point p, je pourrai mener un plan arbitraire P^4, tangentiellement à la courbe α, qui est à la fois tangente aux trois courbes c', c'', c'''.

Je désigne par C^4 la section faite dans la surface Σ par le plan P^4 ; la courbe α sera donc aussi tangente à la courbe C^4 ; par conséquent, les courbes c' et c^4, c'' et c^4, c''' et c^4, seront enveloppées par un cône dont le sommet sera situé sur la droite E.

Si du point p, l'on mène deux tangentes à la courbe C^4, les deux points de contact seront situés sur la courbe C. Je désigne par m^4 et n^4, ces deux points : le plan tangent à Σ au point m^4, passera par la droite m^4p, tangente à C^4, et le plan tangent à Σ au point n^4, passera par la droite n^4p, tangente à C^4. Les tangentes $m'p$, $m''p$, $m'''p$, m^4p, $n'p$, etc., seront les génératrices d'une surface développable ; comme le plan P^4 est arbitraire, je pourrai conclure de ce qui précède, le théorème suivant :

L'espace parcouru par un plan qui se meut tangentiellement à une surface du second ordre, et qui passe toujours par un point fixe p*, a pour enveloppe une surface conique, dont le sommet est le point fixe* p*, et dont la courbe de contact, avec la surface* Σ*, est une courbe plane.*

Et il est évident que le théorème inverse a aussi lieu :

Si l'on fait mouvoir un plan tangentiellement à une surface du second ordre Σ, *de manière que le point de contact soit en chaque position du plan tangent, l'un des points d'une section plane de la surface* Σ, *l'enveloppe de l'espace parcouru sera une surface conique.*

L'on donne au plan de la courbe de contact d'un cône tangent à une surface du second ordre, le nom de *plan polaire*, et au sommet du cône, celui de *pôle* de la surface.

Mais il faut bien observer qu'un plan n'est *plan polaire* d'une surface, que par rapport à un seul *pôle*; comme un point n'est *pôle* d'une surface que par rapport à un seul *plan polaire*.

Ainsi, je pourrai dire que le plan P est *plan polaire* de la surface Σ, par rapport au *pôle* p.

La courbe c' sera la courbe de contact d'un cône tangent à Σ, et aura pour sommet un point que je désigne par p'.

Je désigne par p'' le sommet du cône tangent à Σ suivant C'', et par p''' le sommet du cône tangent à Σ suivant C'''.

D'après les définitions précédentes :

Le point	p' sera *pôle*	de	Σ	par rapport	au	*plan polaire*	P'
	p''	—	—	—		—	P''.
	p'''	—	—	—		—	P'''.

Par la droite $L'_{,,}$ je fais passer un plan arbitraire Q', coupant la surface Σ, suivant une courbe que je désigne par Φ.

Par le point p, je mène deux tangentes à la courbe Φ, et je désigne par φ' et φ'' les deux points de contact, qui seront évidemment sur la courbe C.

Les trois courbes C', C'', Φ, *pourront être enveloppées deux à deux par des cônes dont les sommets seront distribués sur la droite* $J'_{,,}E'_{,,}$; en effet : les quadrilatères plans, $m'\,m''\,n'\,n''$, $m'\,m''\,\varphi'\,\varphi''$, $n'\,n''\,\varphi'\,\varphi''$, auront chacun deux côtés opposés, prolongés passant par le point $l'_{,,}$, les deux autres côtés opposés, prolongés se coupant aux trois sommets des cônes ex-

térieurs, et les diagonales se croisant aux trois sommets des cônes intérieurs, qui enveloppent deux à deux les trois courbes C', C'', Φ.

Les six sommets de ces cônes enveloppés, seront donc sur le plan P.

Si je prends sur $L'_{\prime\prime}$ un autre point q et que je le regarde comme le sommet d'un cône tangent à la surface Σ, j'aurai pour courbe de contact une courbe C, située dans un plan que je désigne par Q.

Je puis raisonner par rapport au système polaire, composé du *pôle q* et du *plan polaire* Q, comme je l'ai fait pour le système polaire formé du *pôle p* et du *plan polaire* P.

Par conséquent, je trouverai que les six sommets des cônes enveloppant deux à deux les trois courbes C', C'', Φ, sont situés sur le plan Q.

Ces six sommets sont donc sur la droite intersection des deux plans P et Q, mais comme la droite $J'_{\prime\prime}$ $E'_{\prime\prime}$ contient déjà deux de ces six sommets, on en conclut que *les trois courbes C', C'', Φ, dont les plans se coupent suivant une même droite $L'_{\prime\prime}$, peuvent être enveloppées deux à deux par six cônes dont les sommets sont tous situés sur une droite unique.*

Et comme le plan Q' est arbitraire, il s'ensuit que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Si l'on a n *sections, faites dans une surface du second ordre par* n *plans passant tous par une même droite, ces* n *sections pourront être enveloppées deux à deux par* 2n *cônes, dont les sommets seront tous situés sur une droite unique.*

Pour mener par la droite $L'_{\prime\prime}$, deux plans tangens à la surface Σ, l'on n'aura qu'à prendre sur cette droite deux points arbitraires p et q; les regarder comme sommets de deux cônes tangens à la surface Σ, et sur deux plans tangens communs à ces cônes, seront les plans tangens demandés.

Les points h et h', intersections des deux courbes C et C_1, courbes de contact des deux cônes tangens, seront les points de contact des deux plans tangens et de la surface Σ.

Et comme les points de contact h et h' seront les intersections

limites de la surface Σ, par les divers plans sécans que l'on peut faire passer par la droite $L'_{,,}$, l'on pourra en conclure, que la droite $J'_{,,}$ $E'_{,,}$ perce la surface Σ aux points *h* et *h'*.

De ce qui précède, l'on peut déduire le théorème suivant :

Si par une droite $L'_{,,}$ arbitrairement située par rapport à une surface du second ordre Σ, l'on mène deux plans tangens à cette surface, la droite $J'_{,,}$ $E'_{,,}$ qui unira les deux points de contact, jouira avec $L'_{,,}$ de la propriété suivante, savoir : l'une contenant les sommets de cônes tangens à la surface Σ, les plans des courbes de contact, passeront par l'autre.

En vertu de cette propriété, je donne aux deux droites $L'_{,,}$ et $J'_{,,}$ $E'_{,,}$ le nom de *polaires réciproques* de la surface Σ.

Par la même raison les couples de droites $\begin{cases} Z'_{,,,} \text{ et } J'_{,,,}\ E'_{,,,} \\ L''_{,,,} \text{ et } J''_{,,,}\ E''_{,,,} \end{cases}$

seront des polaires réciproques de la surface Σ.

Les trois droites $L'_{,,}$, $L''_{,,,}$, $L'_{,,,}$, se coupent en un point *p* qui est *pôle* de la surface Σ, par rapport au *plan polaire* P, qui contient leurs *polaires réciproques*, $J'_{,,}$, $E'_{,,}$, $J''_{,,,}$ $E''_{,,,}$, $J'_{,,,}$, $E'_{,,,}$.

Tout plan qui passera par le point *p*, coupera la surface Σ suivant une courbe qui sera enveloppée avec l'une des trois courbes C', C'', C''', par deux cônes dont les sommets seront situés sur le plan P.

Je puis donc énoncer le théorème suivant :

Lorsque n *droites se coupent en un point* p, *et sont d'ailleurs disposées dans l'espace d'une manière arbitraire par rapport à une surface du second ordre* Σ, *leurs* n polaires réciproques, *sont situées sur un plan unique P, qui est* plan polaire *de la surface* Σ, *par rapport au pôle* p.

Par ce qui précède, l'on voit aussi que la droite $L'_{,,}$ qui unit deux *pôles p* et *q*, est la *polaire réciproque* de la droite intersection des deux *plans polaires* P et Q.

Ainsi les trois *pôles p', p'', p'''* détermineront un plan qui sera *plan polaire* de la surface Σ par rapport au *pôle p*, qui est l'intersection de leurs trois *plans polaires* P' P'' P'''.

Ainsi les trois *pôles* p', p'', p''', sont situés sur le plan P.

Les deux plans P′ et P″ se coupant suivant $L'_{,,}$, cette droite sera la *polaire réciproque* de celle qui unit les deux *pôles* p' et p''.

Par conséquent, p' et p'' seront situés sur la droite $J'_{,,}$ $E'_{,,}$ que nous avons déjà vu être la *polaire réciproque* de la droite $L'_{,,}$.

De même p' et p''' seront sur la droite $J'_{,,,}$ $E'_{,,,}$, et p'' et p''' seront sur la droite $J''_{,,,}$ $E''_{,,,}$.

J'ai démontré dans le n° 3, du tome IIIe de la *Correspondance* déjà citée, que lorsque l'on avait deux courbes du second degré C′ et C″, enveloppées par deux cônes, si l'on prenait deux points arbitraires p' et p'' sur la ligne des sommets, comme sommets de deux nouveaux cônes, ayant pour base, l'un la courbe C′ et l'autre la courbe C″, ces deux cônes se coupaient suivant deux courbes du second degré, dont les plans passaient par la droite $L'_{,,}$, intersection des plans P′ et P″ contenant les courbes C′ et C″.

Je puis donc, d'après cela, énoncer le théorème suivant :

Si l'on a deux courbes du second degré C′ et C″, situées sur une surface du second ordre Σ*; les sommets* p′ *et* p″ *des deux cônes tangens à la surface* Σ, *l'un, suivant C′ et l'autre, suivant C″, sont situés sur la droite* $J'_{,,}E'_{,,}$ polaire réciproque *de la droite* $L'_{,,}$ *intersection des deux plans P′ et P″, contenant les deux courbes C′ et C″.*

Et les deux cônes p′ *et* p″ (*désignant le cône par son sommet*) *se couperont suivant deux courbes du second degré, dont les plans passeront l'un et l'autre par la droite* $L'_{,,}$.

Je fais passer par la droite $J'_{,,}E'_{,,}$, un plan arbitraire V; ce plan coupera la courbe c' aux deux points x', y', et c'' aux deux points x'', y'';

La droite $L'_{,,}$ en un point v;
Le cône p' suivant deux génératrices $p'x'$ et $p'y'$.
— p'' — — — $p''x''$ et $p''y''$.
— $J'_{,,}$ — — — $x'y''$ et $y'x''$.
— $E'_{,,}$ — — — $x'x''$ et $y'y''$.

et la surface Σ suivant une courbe ρ, qui passera par les quatre

points x', y', x'', y'' et qui aura pour tangentes en ces points les quatre génératrices $p'x'$, $p'y'$, $p''x''$, $p''y''$.

En vertu des propriétés des quadrilatères inscrit et circonscrit:

Les deux droites, $p'x'$ et $p''x''$, $p'y'$ et $p''y''$ se couperont sur la droite $\nu J'_{,,}$.

Les deux droites, $p'x'$ et $p''y''$, $p'y'$ et $p''x''$ se couperont sur la droite $\nu E'_{,,}$

et comme le plan V est arbitraire, l'on peut conclure de ce qui précède, que les deux cônes p' et p'' se couperont suivant deux courbes du second degré, dont les plans ne seront autres que les plans $L'_{,,}J'_{,,}$ et $L'_{,,}E'_{,,}$.

La droite $\nu J'_{,,}$ est la *polaire* de la courbe ρ, par rapport au *pôle* $E'_{,,}$; de même la droite $\nu E'_{,,}$ est la *polaire* de la courbe ρ, par rapport au *pôle* $J'_{,,}$.

Le plan V étant arbitraire, l'on peut conclure que le plan $L'_{,,}J'_{,,}$ est *plan polaire* de la surface Σ par rapport au *pôle* $E'_{,,}$, et que le plan $L'_{,,}E'_{,,}$ est aussi *plan polaire* de Σ, par rapport au *pôle* $J'_{,,}$.

Deux *plans polaires*, qui sont tels que, réciproquement, l'un contient le *pôle* de l'autre, sont dits *plans polaires conjugués* ou *réciproques*.

Les deux plans $L'_{,,}J'_{,,}$ et $L'_{,,}E'_{,,}$, seront donc deux *plans polaires*, conjugués ou réciproques.

J'ai dit ci-dessus, que les géomètres avaient donné le nom de *pôle* au sommet du cône tangent à une surface du second ordre, et celui de *plan polaire*, au plan de la courbe de contact.

Mais cette définition du *pôle* et *plan polaire* n'est pas complète, car elle suppose que le *plan polaire* coupe toujours la surface du second ordre suivant une courbe.

En vertu des théorèmes précédemment démontrés, je puis donner une définition complète du *plan polaire* et de son *pôle*.

Étant donnée une surface du second ordre Σ et un plan P arbitrairement situé dans l'espace par rapport à Σ, si je prends n points arbitraires sur P, mais tels que je puisse regarder chacun d'eux comme le sommet d'un cône tangent à Σ, les plans des n, courbes de contact de la surface Σ, avec les n cô-

nes tangens, passeront tous par un point p. Le plan sera dit *plan polaire* de la surface p, le point p en étant le *pôle*.

Si le plan P coupe la surface Σ suivant une courbe α, il sera dit : *plan polaire intérieur*, et son *pôle p* sera dit *pôle extérieur*, parce que, dans ce cas, il sera le sommet d'un cône tangent à la surface Σ suivant la courbe α.

Si le plan P ne coupe pas la surface Σ, il sera dit *plan polaire extérieur*, et son *pôle p* sera dit *pôle intérieur*, parce que dans ce cas l'on ne pourra pas faire passer par ce point p, un plan tangent à la surface Σ.

Il est évident que si le plan P était tangent à la surface Σ, le *pôle p* ne serait autre que le point de contact.

(*La suite au numéro suivant.*)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Mémoire sur différentes propriétés des surfaces du second ordre, communiqué par M. LÉVY, ancien élève de l'École Normale de France.

M. *Olivier*, dans la IVe livraison du tome IIIe de la *Correspondance Mathématique*, a énoncé, sans en donner la démonstration, un théorème général sur les surfaces du second degré, qui est une conséquence immédiate du théorème suivant :

Si l'on mène d'un point quelconque O trois droites OP, OP′, OP″, qui rencontrent une surface du second degré, en choisissant arbitrairement sur chacune des sécantes un des deux points d'intersection, on aura trois points par lesquels on pourra faire passer un plan qui coupera celui mené par les trois autres suivant une ligne droite ; les combinaisons possibles des six points d'intersection donneront quatre lignes

droites; et chaque système de trois sécantes menées par le point O, fournira de la même manière quatre droites; toutes ces droites sont situées sur un même plan qui est le plan polaire du point O.

Pour démontrer ce théorème, prenons pour axes des z, des y et des x, les trois droites OP, OP′, OP″. L'équation de la surface du second degré rapportée à ces lignes, sera de la forme,

$$(1)\ Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Bzy + B'zx + B''xy + Cz + C'y + C''x + D = 0.$$

Soient M, N, les points d'intersection de l'axe des z avec la surface; M′, N′ et M″, N″, les intersections de la même surface avec les axes des y et des x. Désignons par α, β, les z des points M et N, par α', β' les y des points M′, N′, et par α'', β'' les x des points M″, N″.

L'équation du plan mené par les trois points M, M′, M″ sera

$$\frac{z}{\alpha} + \frac{y}{\alpha'} + \frac{x}{\alpha''} = 1.$$

On aura de même pour l'équation du plan mené par les trois points M, N′, N″,

$$\frac{z}{\beta} + \frac{y}{\beta'} + \frac{x}{\beta''} = 1.$$

En ajoutant ces deux équations, on a

$$(2)\qquad z\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + y\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'}\right) + x\left(\frac{1}{\alpha''} + \frac{1}{\beta''}\right) = 2$$

Équation qui est celle d'un plan passant par la ligne d'intersection des deux précédens.

On trouverait encore la même équation en ajoutant les équa-

tions des deux plans M N′ N″, N M′ M″, ou celles des deux plans M M′ N″, N N′ M″, ou encore celles des deux plans M M″ N′, N N″ M′. Car ces équations sont respectivement

$$\frac{z}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\beta''}=1 \qquad \frac{z}{\beta}+\frac{y}{\alpha'}+\frac{x}{\alpha''}=1$$

$$\frac{z}{\alpha}+\frac{y}{\alpha'}+\frac{x}{\beta''}=1 \qquad \frac{z}{\beta}+\frac{y}{\beta'}+\frac{x}{\alpha''}=1$$

$$\frac{z}{\alpha}+\frac{y}{\beta'}+\frac{x}{\alpha''}=1 \qquad \frac{z}{\beta}+\frac{y}{\alpha'}+\frac{x}{\beta''}=1$$

Ainsi les quatre intersections de ces plans deux à deux, sont sur un même plan représenté par l'équation (2). D'où résulte le théorème suivant :

Dans un octaèdre quelconque à faces triangulaires, dont les trois diagonales se coupent au même point, les quatre lignes droites, intersections des faces opposées de l'octáèdre, sont situées sur un même plan.

Revenons maintenant au théorème général sur les surfaces du second degré. Ici α et β, étant les z des points d'intersection de l'axe des z avec la surface, sont les racines de l'équation $Az^2 + Cz + D = o$. On a donc $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{C}{D}$. On aura par une raison semblable,

$$\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'}=-\frac{C'}{D} \text{ et } \frac{1}{\alpha''}+\frac{1}{\beta''}=-\frac{C''}{D}$$

De sorte que l'équation (2) devient

$$(3). \quad Cz + C'y + C''x + 2E = o.$$

Or, maintenant si par l'origine l'on mène trois autres droi-

tes, et qu'on les prenne pour axes des coordonnées, l'équation de la surface rapportée à ces nouveaux axes sera encore de la même forme. On peut donc la représenter par

$$(4)\; az'^2+a'y'^2+a''x'^2+bz'y'+b'z'x'+b''x'y'+cz'+c'y'+c''x'+d=0,$$

et l'équation du plan passant par les quatre droites qui correspondent à ces trois nouvelles sécantes, sera

$$(5)\quad cz'+c'y'+c''x'+2d=0.$$

Mais il résulte de la forme des valeurs qu'il faut substituer pour x, y, z, pour passer d'un système de coordonnées à un autre ayant la même origine, que la partie $cz'+c'y'+c''x'+d$ de l'équation (4), est le résultat immédiat de la substitution de ces valeurs dans la partie $Cz+C'y+C''x+D$ de l'équation (1), et ne reçoit aucune addition de la substitution de ces mêmes valeurs dans les termes du second degré. Par conséquent, l'équation (5) est la transformée directe de l'équation (3), c'est-à-dire, qu'elle représente le même plan; ce qu'il fallait démontrer. Il est d'ailleurs évident, d'après la construction indiquée, que ce plan est le plan polaire du point O.

Une démonstration tout-à-fait analogue à la précédente, s'applique au théorème connu des transversales concurrentes dans les courbes du second degré.

Il est aisé maintenant de démontrer que les plans polaires d'une suite de points situés en ligne droite, se rencontrent tous en une même ligne droite. En effet, on a déjà vu que l'équation du plan polaire de l'origine était,

$$Cz+C'y+C''x+D=0.$$

Prenons un point quelconque R sur l'axe des z, situé à une distance r de l'origine, et cherchons l'équation du plan polaire de ce point. D'abord, pour avoir l'équation de la surface rapportée à des axes dont l'origine serait à ce point, et dont les directions seraient parallèles aux coordonnées actuelles, il suffit de substituer $z'+r$ au lieu de z dans l'équation (1).

On aura donc pour cette équation,

$$Az'^2 + A'y^2 + A''x^2 + Bz'y + B'z'x + B''xy +$$

$$(C + 2Ar)z' + (C' + Br)y + (C'' + B'r)x + D + Ar^2 = o.$$

L'équation du plan polaire du point R, rapportée à ces nouveaux axes, sera donc

$$(C + 2Ar)z' + (C' + Br)y + (C'' + B'r)x + 2D + 2Ar^2 = o$$

substituant dans cette équation au lieu de z' sa valeur $z - r$, on aura l'équation de ce plan rapporté aux premières coordonnées. Cette substitution donne

$$(C + 2Ar)z + (C' + Bry)y + (C'' + B'r)x + 2D - Cr = o.$$

En combinant cette équation avec l'équation du plan polaire de l'origine, on obtient les deux suivantes :

$$Cz + C'y + C''x + D = o, \quad 2Az + By + B'x - C = o.$$

Elles sont indépendantes de r, ce qui prouve que la ligne d'intersection des deux plans polaires sera la même, quelle que soit la position du point R sur l'axe des z.

On sait que par deux sections planes d'une surface du second ordre, on peut toujours faire passer deux cônes, qui ont leurs sommets sur la droite qui joint les pôles des deux sections (1). Ce résultat, combiné avec ce qui précède, conduit bien

---

(1) Voyez le Mémoire de M. *Dandelin*, dans la première livraison du tome III de la *Correspondance Mathématique*. A cette occasion, nous nous permettrons de faire remarquer que le théorème général sur les projections stéréographiques, démontré dans ce Mémoire, et dont un cas particulier sert de base aux recherches que le même auteur a publiées dans les Mémoires de l'ACADÉMIE de Bruxelles, avait été démontré depuis long-temps analitiquement par M. *Chales*, dont la démonstration se trouve à la fin d'un *Traité des lignes du second ordre*, publié par M. *Hachette*, en 1817.

facilement aux propositions suivantes qu'il suffira d'énoncer ici :

1° *Si l'on coupe une surface du second ordre par une série de plans passant par un même point, et que par les sections ainsi obtenues, combinées deux à deux, l'on fasse passer des cônes, les sommets de tous ces cônes sont sur un même plan, qui est le plan polaire du point de concours des plans sécans ;*

2° *Si l'on coupe une surface du second ordre par une série de plans, passant par une même droite, et que par les sections ainsi obtenues, combinées deux à deux, l'on fasse passer des cônes, les sommets de tous ces cônes sont sur une même ligne droite, qui est l'intersection de deux plans polaires, correspondants à deux points quelconques de la droite ;*

3° *Pour mener par une ligne droite un plan tangent à une surface du second ordre, il suffit de construire les plans polaires de deux points quelconques de cette droite, et les points où la ligne d'intersection de ces deux plans perce la surface, seront les points de contact.*

Nous ne nous arrêterons pas à présent à quelques autres conséquences assez curieuses, que l'on peut encore déduire de ce qui précède, et qui se présenteront d'ailleurs naturellement aux personnes qui s'occupent de ce genre de recherches.

Nous passerons maintenant à quelques observations sur une autre proposition démontrée par M. *Olivier*, dans le Mémoire dont nous avons déjà parlé. C'est celle relative à six points distribués deux à deux sur trois droites concurrentes en un point. Elle ne diffère qu'en apparence d'un théorème auquel j'étais parvenu depuis long-temps, et dont voici l'énoncé : *Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, si l'on prend sur l'une des diagonales un point quelconque, que par ce point l'on mène deux lignes, la première coupant les deux côtés du quadrilatère, qui passent par l'une des extrémités de l'autre diagonale ; la seconde les deux autres côtés, on obtient quatre points d'intersection, et la ligne qui joint les deux situés sur les côtés qui passent par l'une des extrémités de la première diagonale, va couper celle qui joint les deux autres en un point de la seconde diagonale.*

On peut encore démontrer ce théorème par l'analise. Mais la vérité en est presqu'évidente dans le cas d'un quadrilatère gauche, et il se trouve alors prouvé pour un quadrilatère plan, en le considérant comme la perspective d'un quadrilatère gauche, le point de vue étant situé sur une ligne qui coupe les deux diagonales de ce dernier. Nous nous dispenserons donc d'en donner ici la démonstration.

M. *Olivier* remarque que lorsque les six points, situés deux à deux sur trois droites concurrentes, appartiennent à une courbe du second degré, les points d'intersection des lignes qui les joignent deux à deux, et qui généralement sont placés trois à trois sur quatre droites, sont alors tous sur la même droite, qui est évidemment la polaire du point de concours. Mais il n'a pas fait observer que, lorsque les six points sont sur une courbe du second ordre, le théorème général a lieu, lors même qu'ils ne sont pas deux à deux sur trois lignes concurrentes. Pour démontrer ce dernier théorème, qui est en quelque sorte le complément de celui de *Pascal*, prenons arbitrairement sur une courbe quelconque du second degré, six ponts α, α', β, β', B, C. (*fig.* 7).

Nous rapporterons la courbe aux lignes A$\alpha\alpha'$X, et A$\beta\beta'$Y. Nous désignerons par α, α', β, β', les distances des points α, α', β, β', à l'origine des coordonnées; par x', y' et x'', y'', les coordonnées des points B et C.

Pour démontrer le théorème de *Pascal*, il faut faire voir que la ligne qui joint le point d'intersection des deux lignes Bβ, Cα', au point d'intersection des deux lignes Bα, Cβ', passe par l'origine des coordonnées. Or, pour cela, il suffit de prouver que le rapport entre l'ordonnée et l'abscisse du premier point, est le même qu'entre l'ordonnée et l'abscisse du second. Cetteégali té peut se démontrer assez simplement. En effet, les équations des lignes Bα, Cβ', sont respectivement

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha-x'}{\alpha y'}y=1. \qquad \frac{y}{\beta'}+\frac{\beta'-y''}{\beta' x''}x=1.$$

D'où l'on déduit, pour le rapport entre l'ordonnée et l'abscisse du point d'intersection, qui est le rapport entre les numérateurs des valeurs de x et de y, qui satisfont à ces deux équations, l'expression,

$$\frac{(\mathcal{C}x'' - \alpha\mathcal{C}' + \alpha y'')\,y'}{(\alpha y' - \alpha\mathcal{C}' + \mathcal{C}'x')\,x''}$$

En y changeant α, $\mathcal{C}$, x', y', x'', y'', respectivement en α', $\mathcal{C}'$, x'', y'', x', y', on aura la valeur du rapport entre l'ordonnée et l'abscisse du point d'intersection des deux lignes B$\mathcal{C}$, Cα', qui sera ainsi

$$\frac{(\mathcal{C}x' - \mathcal{C}\alpha' + \alpha'y')\,y''}{(\alpha'y'' - \alpha'\mathcal{C} + \mathcal{C}x'')\,x'}$$

Pour prouver l'égalité entre cette expression et la précédente, il faut faire voir qu'en les réduisant au même dénominateur, les numérateurs sont égaux. Or, le premier de ces numérateurs peut se mettre sous la forme

$$x'y'\,[\,x''y''\,(\alpha\mathcal{C} + \alpha'\mathcal{C}') - \alpha\alpha'\,(\mathcal{C} + \mathcal{C}')\,y'' + \alpha\alpha'y''^2 -$$
$$\mathcal{C}\mathcal{C}'\,(\alpha + \alpha')\,x'' + \mathcal{C}\mathcal{C}'\,x''^2 + \alpha\alpha'\mathcal{C}\mathcal{C}'\,]$$

mais α, α', $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, étant les abcisses et les ordonnées des points où la courbe rencontre les axes des x et des y, on a, en représentant l'équation de cette courbe par

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

$$\alpha\alpha' = \frac{F}{C},\ \alpha + \alpha' = -\frac{E}{C},\ \mathcal{C}\mathcal{C}' = \frac{F}{A},\ \mathcal{C} + \mathcal{C}' = -\frac{D}{A};$$

substituant ces valeurs, le numérateur devient

$$x'y'\,[\,x''y''\,(\alpha\mathcal{C} + \alpha'\mathcal{C}') - \frac{F}{AC}\,(Dy'' + Ay''^2 + Ex'' + Cx''^2 + F)\,]$$

Le second numérateur sera donc

$$x''y''\left[x'y'(\alpha\beta+\alpha'\beta')-\frac{F}{AC}(Dy'+Ay'^2+Ex'+Cx'^2+F)\right]$$

mais puisque les deux points B et C sont sur la courbe, on a

$$Dy''+Ay''^2+Ex''+Cx''+F=-Bx''y''$$

et

$$Dy'+Ay'^2+Ex'+Cx''+F=-Bx'y'$$

ce qui réduit les deux expressions précédentes aux deux suivantes :

$$x'y'\left[x''y''(\alpha\beta+\alpha'\beta')+\frac{BF}{AC}x''y''\right]$$

et

$$x''y''\left[x'y'(\alpha\beta+\alpha'\beta')+\frac{BFx'y'}{AC}\right]$$

qui sont évidemment égales.

Cette analise démontre donc le théorème de *Pascal*. Il est de plus visible, par la symétrie du calcul, qu'elle s'appliquerait encore à prouver que la ligne qui joint le point d'intersection des deux lignes $B\alpha'$, $C\beta$, au point d'intersection des deux lignes $B\beta'$, $C\alpha$, passerait aussi par le point A. D'où résulte l'énoncé suivant :

Les six points résultant des intersections des trois couples des côtés opposés, et des trois couples de diagonales opposées d'un hexagone quelconque inscrit à une courbe du second degré, sont situés trois à trois sur quatre lignes droites différentes, qui coïncident lorsque les diagonales qui joignent les angles opposés de l'hexagone se coupent au même point.

Le théorème de M. *Brianchon* est, comme l'on sait, une conséquence immédiate de celui de *Pascal*. La proposition précédente y ajoutera quelques modifications, et l'on pourra l'énoncer ainsi :

Dans un hexagone circonscrit à une courbe du second degré, si l'on prolonge deux à deux les côtés, séparés par un côté, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, on obtiendra six points d'intersection, que l'on peut considérer comme les sommets d'un nouvel hexagone; les trois diagonales qui joignent les angles opposés du premier, se coupent en un même point; et les trois diagonales qui joignent les angles opposés du second, se coupent en trois points, dont un sur chacune des premières diagonales; enfin, lorsque trois lignes qui joignent les points de contact des côtés opposés, se coupent en un même point, les six diagonales s'y croisent aussi.

Recherches sur les surfaces du second degré, communiquées par M. Bobillier, professeur à l'école royale de Châlons.

Soit une surface du second degré, représentée par l'équation

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2Dz=o, \qquad (1)$$

c'est-à-dire, rapportée à l'un de ses sommets et à ses axes principaux; en désignant par (x', y', z') les coordonnées de l'un quelconque de ses points, on aura

$$Ax'^2+By'^2+Cz'^2-2Dz'=o; \qquad (2)$$

et, en y transportant l'origine, ce que l'on fera en changeant x, y, z respectivement en $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, l'équation (1) deviendra

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Ax'x+2By'y+2(Cz'-D)z=o.$$

Si l'on suppose maintenant que le moyen des coefficiens A, B, C, soit C, ou, en d'autres termes, que les différences A − C, C − B soient de même signe, en mettant cette équation sous la forme

$$(A-C)x^2+(B-C)y^2+C(x^2+y^2+z^2)$$
$$+2Ax'x+2By'y+2(Cz'-D)z=o,$$

on verra immédiatement que la surface qu'elle représente contient la ligne de pénétration des deux surfaces exprimées par

$$(A-C)x^2+(B-C)y^2=o \quad \text{d'où} \quad y=\pm x\sqrt{\frac{A-C}{C-B}}, \qquad (3)$$

$$B(x^2+y^2+z^2)+2Ax'x+2By'y+2(Cz'-D)z=o; \qquad (4)$$

Or, la première équation appartient à un système de deux plans réels passant par l'origine des coordonnées; et la seconde une sphère également réelle, et passant par la même origine; on sait d'ailleurs que toute section faite dans une sphère par un plan est un cercle; on peut donc conclure qu'*en chaque point d'une surface du second degré on peut faire passer deux circonférences de cercle*.

En faisant varier la position de la nouvelle origine sur la surface, les plans (3) des sections circulaires ne font que se transporter parallèlement à eux-mêmes, et conséquemment les centres de ces sections se meuvent sur deux diamètres. Ainsi *une surface du second degré peut être engendrée de deux manières différentes, par un cercle de rayon variable, dont le centre décrit une ligne droite, et dont le plan se meut parallèlement à lui-même*.

Lorsque $A=C$, il est visible (3) que les deux séries de sections circulaires se confondent, et que leurs plans sont perpendiculaires à l'axe des y parcouru par leurs centres; la surface est donc de révolution. La même circonstance se présente lorsque $B=C$. Si $A=B=C$, l'équation (3) est indéterminée, ce qui doit être, puisque la surface est alors sphérique.

Examinons encore le cas de $C=o$, ce qui exige que les coefficiens A et B soient de signe contraire; dans cette hypothèse, l'équation (1) représente une paraboloïde hyperbolique,

et les équations (3) et (4) se réduisent à

$$y=\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}\,x\,,\quad Ax'x+By'y-Dz=o;$$

en conséquence, les cercles des sections circulaires passent à l'infini, et elles se transforment elles-mêmes en deux lignes droites, respectivement parallèles à deux plans fixes; il s'ensuit donc que le *paraboloïde hyperbolique peut être engendré de deux manières différentes par une droite qui glisse sur deux droites fixes, en restant parallèle à un plan invariable.*

Les coordonnées du centre de la sphère (4) sont évidemment

$$-\frac{Ax'}{C}\,,\,-\frac{By'}{C}\,,\,-\frac{cz'-D}{C}\,;$$

en appelant donc α, $\mathit{6}$, r, les coordonnées du même centre, relativement aux plans primitifs, on aura

$$\alpha=x'-\frac{Ax'}{C}=\frac{(C-A)\,x'}{C},\qquad \beta=y'-\frac{By'}{C}=\frac{(C-B)y'}{C},$$

$$r=z'-\frac{cz'-D}{C}=\frac{D}{C}\,;\qquad (5)$$

d'où il suit que toutes les sphères qui rencontrent une surface du second degré suivant deux cercles, ont leurs centres dans l'un des plans principaux.

Si l'on suppose que le point (x', y', z',) au lieu d'être indéterminé sur la surface (1), soit astreint à parcourir le périmètre de la section faite par le plan

$$z=Mx+Ny+L\,,\qquad (6)$$

on pourra éliminer x', y', z', entre les équations (2), (5) et

$z' = Mx' + Ny' + L$, et l'équation résultante, jointe à la dernière des équations (5), appartiendra à la ligne décrite par le centre de la sphère ; mais il est visible que l'équation finale sera du second degré, en α et β. On aura par conséquent ce théorème : *les centres de toutes les surfaces sphériques, déterminées par les couples des sections circulaires faites dans une surface du second degré, par les divers points de l'une de ses sections planes, se trouvent sur une courbe du même degré.*

Si le plan sécant (6) était privé du terme affecté de z, auquel cas il serait perpendiculaire au plan des xy, l'équation finale en α et β serait du premier degré, et le centre de la sphère parcourrait une ligne droite.

En partant de là, il devient très-simple de prouver que *les centres des surfaces sphériques qui passent par le sommet d'une surface conique, et par ses diverses sections circulaires, se trouvent sur deux droites abaissées du sommet, perpendiculairement sur les mêmes sections.* (Question prop. vol. III.)

Considérons l'hyperboloïde à une nappe représentée par

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 ;$$

et remarquons qu'en transposant le terme $\frac{x^2}{a^2}$ dans le second membre ; cette équation peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right); \quad (7)$$

or, en désignant par ρ une quantité purement arbitraire, elle sera satisfaite par le système des deux suivantes :

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \rho\left(1 + \frac{x}{a}\right), \quad \rho\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{x}{a}, \quad (8)$$

donc, elle en est le produit ; mais chacune de ces nouvelles équa-

tions représente un plan et leur ensemble une ligne droite ; en les comparant d'ailleurs avec deux autres équations de même forme, on s'aperçoit aisément qu'elles ne peuvent exister en même temps. Il est donc prouvé que l'*on peut coucher sur un hyperboloïde à une nappe une infinité de droites qui, considérées deux à deux, ne se rencontrent point.*

Si l'on remarque maintenant que l'équation (7) est aussi vérifiée, quelle que soit la valeur attribuée à ϖ par,

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\varpi\left(1-\frac{x}{a}\right),\qquad \varpi\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{x}{a},\qquad (9)$$

on en conclura encore qu'*il existe, sur la même surface, une autre série de lignes droites, non situées deux à deux, dans le même plan.*

On reconnaît également, à une simple inspection, que les quatre équations (8) et (9) sont compatibles, n'importe les valeurs assignées à ρ, et à ϖ; et par suite, que *deux droites, prises arbitrairement, l'une dans le premier système, et l'autre dans le second, ont un point commun. De là résulte que l'hyperboloïde à une nappe peut être engendré de deux manières, par une droite assujettie à glisser sur trois droites fixes.*

Les deux plans variables (8) sont astreints à passer respectivement par les deux droites.

$$\begin{array}{ll}\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, & 1+\frac{x}{a}=0;\\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0, & 1-\frac{x}{a}=0;\end{array}\qquad (10)$$

qui font partie du second système; or, ces mêmes plans seront constamment rectangulaires lorsqu'on aura

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{\rho}{b}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\rho}{c}-\frac{1}{a}\cdot\frac{\rho}{a}=0\qquad\text{ou}\qquad \frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}=0;$$

en observant donc qu'il est toujours possible de disposer les plans coordonnés, de manière que les équations (10) soient celles de deux droites quelconques qui ne se rencontrent pas, on a ce théorème, dû à M. *Binet*; *le lieu des intersections de deux plans rectangulaires, assujettis à passer respectivement par deux droites fixes, non situées dans le même plan, est un hyperboloïde à une nappe.*

Les deux droites fixes (10) coïncidant avec les génératrices du second mode menées par les extrémités du grand axe de l'ellipse de gorge, on voit sur-le-champ que les sections circulaires de la surface décrite leur sont perpendiculaires. On conçoit pareillement que la génération est double.

Lorsque les deux droites fixes se coupent, la surface se réduit à une surface conique, ainsi que M. *Hachette* l'a fait voir dans sa correspondancc, où l'on trouve aussi le théorème de M. *Binet*. (Je ne sais si je cite juste, n'ayant point pour le moment cet ouvrage entre les mains.)

3. C'est un problème curieux, dont, si je ne me trompe, on ne s'est point encore occupé, de trouver le lieu des points où les génératrices d'une surface gauche du second ordre se croisent sous des angles égaux. Soient d'abord x', y', z', les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperboloïde

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2=a^2b^2c^2,$$

en sorte que

$$b^2c^2x'^2+a^2c^2y'^2-a^2b^2z'^2=a^2b^2c^2; \quad (11)$$

en y transportant l'origine, l'équation de la surface devient

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2-a^2b^2z^2+2b^2c^2x'x+2a^2c^2y'y-2a^2b^2z'z=0,$$

et en y substituant les équations

$$x=pz,\ y=qz,$$

d'une droite qui passe par ce point, il vient

$$(b^2c^2p^2+a^2c^2q^2-a^2b^2)z^2+2(b^2c^2x'p+a^2c^2y'q-a^2b^2z')z=o;$$

si cette droite est une génératrice, il faut que cette dernière équation soit satisfaite par toutes les valeurs attribuées à la variable z, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$b^2c^2p^2+a^2c^2q^2-a^2b^2=o\quad b^2c^2x'p+a^2c^2y'q-a^2b^2z'=o;\quad (12)$$

et de là on pourra tirer deux couples de valeurs de p et de q, qui correspondront aux deux génératrices que l'on peut tracer sur la surface par le point x', y', z'.

Désignant par p' et p'' les deux valeurs de p, par q' et q'' celles de q, et par ν l'angle constant des deux génératrices, on aura, en vertu d'une formule connue.

$$\frac{1+p'p''+q'q''}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}\sqrt{1+p''^2+q''^2}}=\cos.\nu=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tang.^2\nu}}.$$

Et en élevant au carré; puis, chassant les dénominateurs,

$$(1+p'^2+q'^2)(1+p''^2+q''^2)-(1+p'p''+q'q'')^2=(1+p'p''+q'q'')^2\tang^2.\nu,$$

formule que l'on peut aisément ramener à la forme

$$(p'-p'')^2+(q'-q'')^2+(p'q''-p''q')^2=(1+p'p''+q'q'')^2\tang.^2\nu.\quad (13)$$

Il ne s'agit plus maintenant que d'y remplacer p', p'', q', q'', par leurs valeurs en fonction des coordonnées x', y', z', afin d'obtenir l'équation d'une surface qui pénétrera l'hyperboloïde selon la courbe cherchée.

En éliminant d'abord q entre les équations (12), on trouve

$$b^2c^2(b^2c^2x'^2+a^2c^2y'^2)p^2-2a^2b^4c^2x'z'p+a^2b^2(a^2b^2z'^2-a^2c^2y'z^2)=o;$$

mais on déduit de l'équation (11),

$$b^2c^2x'^2+a^2c^2y'^2=a^2b^2(c^2+z'^2),\ a^2b^2z'^2-a^2c^2y'^2=b^2c^2(x'^2-a^2);$$

substituant et divisant ensuite par $a^2\,b^4\,c^2$, elle se réduit à

$$(c^2+z'^2)\,p^2-2x'z'p+x'^2-a^2=0;\quad (14)$$

l'élimination de p conduirait également à l'équation

$$(c^2+z'^2)\,q^2-2y'z'q+y'^2-b^2=0;\quad (15)$$

on a conséquemment

$$p'p''=\frac{x'^2-a^2}{c^2+z'^2},\quad q'q''=\frac{y'^2-b^2}{c^2+z'^2}$$

d'où l'on conclut

$$(1+p'p''+q'q'')^2=\frac{[(x'^2+y'^2+z'^2)-(a^2+b^2-c^2)]^2}{(c^2+z'^2)^2};$$

actuellement, en ayant égard à l'équation (11), on tire de (14) et de (15)

$$p=\frac{bx'z'\pm acy'}{b\,(z'^2+c^2)},\quad q=\frac{ay'z'\mp bcx'}{a\,(z'^2+c^2)}$$

et par suite

$$(p'-p'')^2=\frac{4a^2c^2y'^2}{b^2(z'^2+c^2)^2},\quad (q'-q'')^2=\frac{4b^2c^2x'^2}{a^2(z'^2+c^2)^2},$$

$$(p'q''-p''q')^2=\frac{4z'^2(b^2c^2x'^2+a^2c^2y'^2)}{a^2b^2c^2(z'^2+c^2)^4}=\frac{4a^4b^4z'^2}{a^2b^2c^2\,(z'^2+c^2)^3};$$

portant toutes ces expressions dans l'équation (13), on a pour

celle de la surface cherchée

$$4(b^4c^4x'^2+a^4c^4y'^2+a^4b^4z'^2)=$$

$$a^2b^2c^2\,\text{tang.}^2\,\nu\,[(x'^2+y'^2z'^2-(a^2+b^2-c^2)]^2;\ (16)$$

ainsi, la ligne où les génératrices d'un hyperboloïde se croisent sous des angles égaux, est située sur une surface du quatrième degré.

Lorsque l'angle ν des génératrices est droit, on a $1:\text{tang.}\nu=o$, et l'équation précédente se change en

$$x'^2+y'^2+z'^2-(a^2+b^2-c^2)=o.$$

On voit donc que *si du centre d'un hyperboloïde à une nappe, on décrit une sphère d'un rayon égal à* $\sqrt{a^2+b^2-c_2}$, *les deux génératrices d'un point quelconque de l'intersection des deux surfaces seront rectangulaires.*

Cette intersection ne sera réelle que lorsqu'on aura

$$x^2+b^2-c^2>b^2 \text{ ou } a>c.$$

Quand les demi-axes a et c seront égaux, il n'y aura évidemment que deux paires de génératrices qui se couperont à angle droit; ce seront celles des sommets du petit axe de l'ellipse de gorge.

Dans l'hypothèse $b=c$, le lieu des points d'intersection des génératrices orthogonales, est exprimé par les deux équations

$$b^2x'^2+a^2y'^2-a^2z'^2=a^2b^2,\quad x'^2+y'^2+z'^2=a^2;$$

retranchant la seconde de la première, après l'avoir multipliée par b^2, il vient

$$(a^2-b^2)y'^2-(a^2+b^2)z'^2=o,$$

d'où

$$y' = \pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\,z',$$

ce qui apprend que *dans l'hyperbole équilatère, toutes les génératrices, qui se coupent sur les sections circulaires, menées par le centre, sont rectangulaires.*

Lorsque l'hyperboloïde est de révolution, il devient possible d'éliminer $y'^2 + x'^2$ entre les deux équations (11) et (16); on en obtient ainsi une troisième, qui ne renferme plus que la variable z'; on voit donc que le lieu des points où les génératrices se coupent sous un angle constant, est un système de deux parallèles également éloignées du centre.

Pour parvenir aux résultats qui correspondent aux précédens dans le paraboloïde hyperbolique, changeons dans les équations (11) et (16) x' en $x'-a$, ce qui revient à transporter l'origine au sommet négatif du grand axe de l'hyperboloïde; posons ensuite $b^2=\varphi a$, $c^2=\psi a$, elles deviendront par là

$$\varphi\psi x'^2 + \psi a y'^2 - \varphi a z'^2 - 2\varphi\psi a x' = o,$$

$$4(\varphi^2\psi^2 x'^2 + \psi^2 a^2 y'^2 + \varphi^2 a^2 z'^2 - 2\varphi^2\psi^2 a x' + \varphi^2\psi^2 a^2)$$

$$= \varphi\psi\,\text{tang.}\,\nu\,[x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2ax' - (\varphi-\psi)a]^2;$$

or, en imaginant que a passe à l'infini

$$\psi y'^2 - \varphi z'^2 - 2\varphi\psi x' = o,$$

$$\psi^2 y'^2 + \varphi^2 z'^2 + \varphi^2\psi^2 = \varphi\psi\,\text{tang.}^2\nu\left[x' + \frac{(\varphi-\psi)}{2}\right]^2.$$

La première appartient à un paraboloïde hyperbolique dont le grand axe est dirigé selon la ligne des x; la seconde a un hyperboloïde à une nappe; leur intersection commune est le lieu des points de rencontre des génératrices, relatives à la première sur-

face, qui font un angle v; les projections de cette courbe sur les plans des xz et des yz, sont deux sections coniques; mais celle sur le plan yz est du quatrième degré.

Si l'on pose $v = 90°$, la seconde équation, se réduisant à $x' = \frac{\psi - \varphi}{2}$ représente une section plane du paraboloïde; si l'on fait en outre $\varphi = \psi$, il vient $x = o$; la courbe cherchée est en conséquence un système de deux génératrices ayant pour équations, sur le plan des yz, $y \pm z$.

Châlons-sur-Marne, le 12 décembre 1827.

Sur les focales dans le cône. Extrait d'uue lettre de M. VAN REES, professeur à l'université de Liége.

« J'ai été conduit dernièrement par hasard à quelques propriétés de la *focale* (1) qui me paraissent nouvelles. M'étant occupé de la recherche *de la courbe de chacun des points de laquelle on voit, sous des angles égaux, deux droites données de grandeur et de position*, je parvins à en réduire l'équation très-compliquée de manière à pouvoir la discuter. Je vis bien que votre focale en est un cas très-particulier, ce qui me fit soupçonner que l'équation générale pourrait appartenir aux focales considérées dans des cônes quelconques du second degré. En effet, si par un point d'une surface conique du 2e degré, situé dans une des sections principales de la surface, on fait passer une suite de plans perpendiculaires à la section principale, ceux-ci couperont la surface suivant des courbes du second

---

(1) J'ai cru pouvoir nommer ainsi la courbe, qui est le lieu de tous les foyers des sections formées dans un cône droit par les plans qui passent par une même tangente : *Dissertatio de quibusdam locis geometricis;* et les Mémoires de L'ACADÉMIE de Bruxelles. Cette courbe jouit de nombreuses propriétés, dont la moindre n'est certainement pas d'avoir donné naissance à un beau Mémoire de M. *Dandelin*, qui renferme pour ainsi dire le germe de toutes les recherches que ce géomètre a publiées depuis. A. Q.

degré, dont le premier axe, et par conséquent aussi les foyers, seront en général dans la section principale. Le lieu des foyers pourra encore être nommé *focale*, en donnant à ce mot un sens plus étendu que celui que vous lui avez attribué. Le calcul ne tarda pas à vérifier ce premier soupçon, en me démontrant que l'équation générale des focales est identique avec celle des courbes que j'avais d'abord cherchée. Cette équation, réduite à la forme la plus simple, est $(x+d)(x^2+y^2)+Bx+Cy=0$. L'origine est au point par lequel passent les plans coupans, l'axe des y est parallèle à l'asymptote de la courbe. »

Parmi les propriétés qu'énonce M. *Van Rees*, nous avons remarqué la suivante : *deux cordes égales et parallèles de l'hyperbole équilatère sont vues sous des angles égaux de tous les points de l'hyperbole situés hors des parallèles, et sous des angles supplémentaires de tous les points situés entre les parallèles.* M. *Van Rees* ayant eu l'obligeance de nous promettre de rédiger une note sur ses recherches, nous nous empresserons de la communiquer à nos lecteurs, dès qu'elle nous sera parvenue, nous pourrons y joindre l'indication de quelques propriétés de la focale, tirées d'un Mémoire inédit que nous devons à l'amitié de M. *Dandelin*.

MÉCANIQUE ANALITIQUE.

Note sur un cas particulier du mouvement de rotation d'un cylindre très-mince, suspendu à l'extrémité d'un fil flexible(1), par M. Pagani, professeur extraordinaire à l'Université de Louvain.

Considérons un cylindre homogène AB (*fig.* 8), d'une épais-

---

(1) Ce qui a donné lieu à cette recherche, c'est la belle expérience de M. *Gregory*, que M. *Quetelet* a le premier répétée en présence de l'Académie, dans sa séance du 10 novembre 1827. *Voyez* la page 208 du précédent volume.



seur très-petite, suspendu à l'extrémité A du fil flexible OA, dont le bout O est attaché à l'extrémité de l'axe d'une roue mue horizontalement.

Le cylindre tournerait autour de son axe AB, si le système ne pouvait osciller de part et d'autre de la verticale, en prenant la position indiquée par la *fig.* 9. A cause de ces oscillations, qui ont toujours lieu, le cylindre doit prendre un mouvement de rotation autour de la verticale qui passe par le point de suspension O, et par le centre de gravité G du système. Mais, en faisant abstraction du poids du fil OA, par rapport au poids du cylindre AB, le point G sera placé au milieu de l'axe AB.

Maintenant, si nous supposons que la vitesse angulaire de la roue est constante, le système, formé par le fil et par le cylindre, est bientôt réduit à un état permanent de mouvement; et cet état sera connu, lorsqu'on aura la valeur de l'angle formé par l'axe du cylindre et par la verticale OG (*fig.* 3), et que l'on pourra déterminer la courbe OMA formée par le fil flexible, ainsi que la tension que ce fil éprouve dans ses divers points. C'est le problème dont la solution forme l'objet de cette note.

Menons deux axes fixes Oy, Ox, l'un horizontal, l'autre dirigé dans le sens de la pesanteur; et nommons, pour abréger,

l la longueur AG,

Σ l'aire d'une section du cylindre, normale à l'axe AB,

$P = 2gl\Sigma$, le poids du cylindre,

P' la résultante de toutes les forces centrifuges qui sollicitent, dans le sens horizontal, tous les points de la partie GA du cylindre,

P'' la même force pour la partie GB du cylindre,

T la tension du fil à l'extrémité A,

θ la vitesse angulaire du système,

α l'angle AGO,

β l'angle formé par la tangente de la courbe au point A, avec l'axe des y; enfin

x, y, les coordonnées du point A, où agit la force T,

x', y' celles du point N où agit la force P',
x'', y'' celles du point N' où agit la force P''.

Cela posé, l'équilibre devra subsister entre les forces P, P', P'' et T, qui sollicitent le cylindre AB, lorsque celui-ci sera parvenu à un état permanent de mouvement. Or, on trouve aisément que cet équilibre exige que l'on ait les équations suivantes:

$$P + T \sin.\beta = o,$$

$$P' + P'' + T \cos.\beta = o,$$

$$P'x' + P''x'' + Tx \cos.\beta - Ty \sin.\beta = o.$$

Mais, à cause que GA = GB, l'on doit avoir $P'' = -P'$; ce qui change ces équations dans celles-ci:

$$P + T \sin.\beta =$$

$$T \cos.\beta = o$$

$$P'(x'' - x') + Ty \sin.\beta = o;$$

et puisque T ne peut pas être nul, il faudra que l'on ait $\beta = 90°$, en vertu de la seconde équation; ce qui *démontre que la tangente au point* A *doit être verticale*. On aura ensuite

$$T = -P,$$

$$P'(x'' - x') - Py = o.$$

Maintenant, on trouve que la force P', calculée d'après les principes connus, est égale à $\frac{1}{2}\Sigma\theta^2 l^2 \sin.\alpha$, et que son point d'application N se trouve aux deux tiers de la distance GA; d'où il résulte que l'on a $GN = GN' = \frac{2}{3}l$, et $x'' - x' = -\frac{4}{3}l\cos.\alpha$. Enfin il est très-facile de voir que $y = l \sin.\alpha$, et en nous rappelant que $P = 2gl\Sigma$; la dernière équation, trouvée pour l'é-

quilibre du cylindre, deviendra

$$\frac{2}{3}\Sigma\theta^2 l^3 \sin.\alpha \cos.\alpha = 2\Sigma g l^2 \sin.\alpha,$$

d'où

$$\cos.\alpha = \frac{3g}{l\theta^2},$$

formule très-simple, au moyen de laquelle on connaîtra l'inclinaison de l'axe du cylindre, lorsque sa longueur, ainsi que la vitesse angulaire de son mouvement, seront connues. Ici la lettre g désigne le double de l'espace parcouru par les corps qui descendent librement dans le vide pendant une seconde; et il faut avoir soin de prendre pour θ, le rapport entre l'arc parcouru par un des points du système pendant une seconde, et la distance de ce point à la verticale OGx (1).

Occupons-nous de la recherche de l'équation de la courbe OMA (*fig.* 10); et pour plus de simplicité, supposons au fil la même épaisseur qu'au cylindre, en faisant abstraction du poids du fil, qui est toujours très-petit relativement aux autres forces qui le sollicitent.

En dénotant par x, y, les coordonnées du point M, par λ la tension qu'éprouve le fil dans ce point, par S la longueur de la courbe OM, et par Y la force centrifuge qui sollicite l'élément de la courbe au point M; on aura, pour l'équilibre du fil, ces deux équations,

$$(a) \quad \begin{cases} d.\left(\lambda\dfrac{dx}{ds}\right)=0 \\ d\left(\lambda\dfrac{dy}{ds}\right)+Y=0. \end{cases}$$

(1) Cette valeur de cos. α, nous montre que le système ne parviendra à l'état permanent, que lorsqu'on aura $l\theta^2 > 3g$; ce qui exige que la vitesse angulaire θ soit plus grande que $\sqrt{\frac{3g}{l}}$.

La première de ces équations donne en l'intégrant,

$$\lambda \frac{dx}{ds} = \text{const.};$$

Mais au point A l'on a $\frac{dx}{ds} = 1$, $\lambda = 2\Sigma gl$; d'où const. $= 2\Sigma gl$; partant

$$(b) \qquad \lambda = 2\Sigma gl \frac{ds}{dx}.$$

Développons les deux équations (*a*), en observant que l'on a $Y = \Sigma\theta^2 yds$; nous aurons

$$\lambda d.\frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds} d\lambda = 0$$

$$\lambda d.\frac{dy}{ds} + \frac{dy}{ds} d\lambda + \Sigma\theta^2 yds = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par $\frac{dx}{ds}$, et la seconde par $\frac{dy}{ds}$, et ajoutons les produits; nous trouverons, en prenant ds constant,

$$d\lambda + \Sigma\theta^2 ydy = 0.$$

Cette équation nous fournit en intégrant,

$$\lambda + \frac{1}{2}\Sigma\theta^2 y^2 = \text{const.}$$

Observons que l'on doit avoir au point A, $y = l \sin. \alpha$, $\lambda = 2\Sigma gl$; et si nous déterminons la constante d'après cette

condition, nous aurons

$$(c)\qquad \lambda = \frac{\Sigma}{2}\left[4gl + \theta^2 (l^2 \sin.^2 \alpha - y^2)\right].$$

Cette formule nous donne la valeur de la tension du fil en fonction de la distance du point, que l'on considère, à la verticale OG. Pour avoir la tension qu'éprouve le fil au point O, il suffit de faire $y = o$ dans la formule (c); et l'on aura, pour la valeur de cette tension,

$$\lambda = \frac{\Sigma}{2}\left[4gl + \theta^2 l^2 \sin.^2 \alpha\right];$$

cette valeur de λ est, en même temps, la plus grande de toutes celles que cette variable peut obtenir :

Posons, pour abréger, $\frac{dy}{dx} = p$, ce qui nous donne $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+p^2}$; les deux valeurs de λ que nous avons trouvées nous fourniront l'équation

$$\sqrt{1+p^2} = 1 + \frac{\theta^2}{4gl}(l^2 \sin.^2 \alpha - y^2).$$

En faisant disparaître le radical de cette équation, on pourra l'écrire de cette manière

$$(d)\ p^2 = \frac{\theta^2}{16 g^2 l^2}(l^2 \sin.^2 \alpha - y^2)\left[8gl + \theta (l^2 \sin.^2 \alpha - y^2)\right];$$

d'où il est facile d'avoir

$$(e)\ dx = \theta \frac{4\,gldy}{\sqrt{l^2 \sin.^2 \alpha - y^2}\sqrt{8gl + \theta^2 (l^2 \sin.^2 \alpha - y^2)}}.$$

Le second membre de cette équation n'est point intégrable sous forme finie; mais il pourra servir à construire la courbe OMA par les intersections successives de ses tangentes, dont les inclinaisons sur l'axe des y sont faciles à calculer à l'aide de la formule (e).

Si nous supposons y nul dans la formule (d), nous aurons

$$p = \frac{\theta \sin. \alpha}{4g} \sqrt{8gl + \theta^2 l^2 \sin.^2 \alpha}$$

pour la valenr de la tangente de l'angle formé par le premier côté de la courbe avec l'axe des x. On voit donc que la tangente à la courbe au point O ne peut jamais être horizontale.

Nous pouvons transformer l'équation (e) dans une autre très-simple en faisant

$$(f) \qquad y = l \sin. \alpha \sin. \varphi.$$

En effet, l'équation (e) devient, par la substitution de cette valeur de y,

$$(g) \quad dx = \frac{4gld\varphi}{\theta\sqrt{8gl + \theta^2 l^2 \sin.^2 \alpha - \theta^2 l^2 \sin.^2 \alpha \sin.^2 \varphi}}$$

Nous pouvons encore éliminer l'angle α de ces deux dernières équations, au moyen de sa valeur donnée par la formule $\cos. \alpha = \frac{3g}{l\theta^2}$; et si nous faisons, pour abréger,

$$c^2 = \frac{l^2 \theta^4 - 9g^2}{8gl\,\theta^2 + l^2 \theta^4 - 9g^2},$$

les équations (f) et (g) deviendront

$$y = \frac{1}{\theta^2}\sqrt{l^2 \theta^4 - 9g^2}. \operatorname{Sin.} \varphi,$$

$$dx = \frac{4gl}{\sqrt{8gl\,\theta^2 + l^2 \theta^4 - 9g^2}} \times \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}}.$$

Ces quatre dernières formules renferment, sous un forme extrêmement simple, la solution complète du problème que je me suis proposé de résoudre. (1)

Note de M. PAGANI *relative à la page 186, du tome III.*

Je me souviens que M. *Quetelet* m'a dit, lorsque je lui ai remis la solution de ce problème d'algèbre, que la question avait été proposée par M. *Noël.* D'après cela, je ne doute nullement que M. *Noël* en ait trouvé une solution; mais j'aurais désiré qu'il eût déclaré que la mienne était déjà imprimée dans la *Correspondance*, avant la publication de ses *Mélanges d'Algèbre*, que je ne connais que par l'analise qui vient de paraître; et que de plus, la formule que j'ai donnée est la seule qui renferme la véritable solution.

---

(1) Nous avons reçu, sur ce même sujet, un Mémoire de M. *Desalis*, avec des expériences très-curieuses et très-précises, qui ont été faites par M. *Nerenburger.* Les résultats de M. *Desalis* ne s'accordent pas tout-à-fait avec ceux de M. *Pagani*, qui paraît avoir trop restreint la question, en supposant que le centre de gravité de la barre était toujours dans la verticale, qui passe par le point de suspension. M. *Desalis* prouve que cette circonstance n'a lieu que quand la vitesse de rotation est nulle ou infinie. Le mouvement d'ailleurs peut avoir lieu de trois manières, et ses circonstances dépendent aussi de la longueur du fil de suspension. Le numéro actuel étant déjà composé en partie, lorsque ces Mémoires nous sont parvenus, nous avons dû les renvoyer au numéro suivant. A. Q.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

PHYSIQUE.

Sur la rotation d'une lentille qui descend le long d'un plan incliné. Par M. Crahay, professeur de physique à l'Athénée de Maestricht.

« En inclinant la glace sur laquelle le verre de montre, ou en général le segment sphérique, est posé, il glissera suivant la ligne de la plus courte descente, si on ne l'en empêche en mouillant la surface convexe; mais ne pouvant glisser, il s'incline en avant à cause du déplacement de son centre de gravité. Dans cette position, concevons un plan, passant par le centre de gravité du verre de montre et par son point d'appui, et qui soit perpendiculaire à la surface de la glace; si ce plan est vertical, le centre de gravité est soutenu, le verre sera en équilibre et restera en repos; en supposant qu'il n'ait pas reçu de mouvement étranger, et que la pente de la glace soit assez faible pour qu'il ne glisse pas. Mais cet état d'équilibre n'est qu'instantané; pour peu que le plan perpendiculaire qui passe par le centre de gravité et par le point d'appui, cesse d'être vertical, le centre de gravité ne sera plus soutenu; il descendra du côté vers lequel le plan s'incline, fera tourner le verre de montre, qui s'appuiera successivement sur de nouveaux points placés en cercle, et s'avancera par conséquent *en roulant* sur

la glace, suivant une ligne qui fera avec celle de la plus courte descente un angle plus ou moins grand, angle qui dépendra de la position du plan perpendiculaire : cette position déterminera aussi le degré d'accélération du mouvement pour un verre donné.

» La ligne verticale qui passe par le centre de gravité, engendre, pendant le mouvement de rotation, une surface conique, dont l'intersection avec la surface sphérique du verre, forme le cercle sur lequel celui-ci descend en roulant.

» Lorsqu'après avoir incliné la glace, on la tourne de manière à faire pencher à droite ou à gauche le plan perpendiculaire, la rotation du verre s'établit à droite ou à gauche, en conséquence de ce qui a été exposé ci-dessus : ce qui prouve que la rotation n'est pas due à une irrégularité de la forme de la goutte d'eau, puisque dans ce cas le mouvement ne pourrait pas, à volonté, être déterminé dans un sens ou dans l'autre.

» L'action capillaire, qui résulte de l'interposition du liquide, a pour effet de produire une adhérence entre le verre de montre et la glace, de manière à empêcher le glissement, sans beaucoup entraver le mouvement de rotation. Si toute la glace est mouillée, le verre glisse aisément; aussi l'expérience est-elle alors plus difficile à faire que lorsque la glace est sèche, et que le verre est mouillé par une goutte de liquide qu'on a eu soin d'étendre un peu autour de l'endroit où le contact aura lieu.

» On peut aussi, pour produire l'adhérence, enduire la glace d'un peu de suif, que l'on étend avec le bout du doigt, pendant que la glace est légèrement chauffée, afin que la couche soit aussi mince que possible. On y pose le verre de montre bien essuyé.

» Ce dernier procédé permet d'étudier commodément le phénomène : en plaçant l'œil dans une certaine position, on distinguera nettement le point de contact du verre : il se montre comme une petite tache noire; on observera qu'il change de position à mesure qu'on soulève la glace, et enfin, que

pendant la rotation il parcourt un petit cercle dont le centre se trouve sur l'axe du verre; ce petit cercle se dessinera aussi sur le verre par une légère couche de graisse qui s'y attache. On trouvera de l'avantage à se servir maintenant d'une lentille biconvexe, dont le foyer ne doit guère être au-delà de 2 centimètres, ou bien de deux verres de montre très-bombés, que l'on colle par leurs ouvertures l'un contre l'autre, afin de relever le centre de gravité, les cercles décrits par le point de contact, en seront plus grands.

» Puisque la rotation a lieu sans emploi de liquide, on sera convaincu que l'action capillaire n'y est pour rien (1).

» Il résulte de l'explication qui précède, plusieurs conséquences faciles à vérifier, mais qu'il serait trop long de détailler ici. »

Extrait d'une réponse du rédacteur à M. Crahay, au sujet *de la rotation d'une lentille sur un plan incliné.*

Je pense aussi que l'explication donnée par le *Globe* (2) est insuffisante, en attribuant exclusivement le phénomène à l'action capillaire de l'eau interposée entre la lentille et le plan. Je m'étais déjà convaincu, comme vous, que la rotation de la lentille pouvait avoir lieu sans le liquide. Il me semble d'ailleurs, si j'ai bien compris le sens des paroles de M. *Gilliéron*, qu'il est parti d'un principe inexact, en supposant qu'il existe entre le plan et le verre de montre plus d'espace d'un côté que d'un autre, « ce qui ferait que le liquide abandonne les endroits où il occupe plus d'espace, pour se porter vers ceux où il en occuperait moins. » Si la lentille est sphérique, l'espace,

---

(1) M. *Tandel*, régent à Echternach, nous a fait parvenir une note sur le phénomène qui nous occupe, et a reconnu aussi que la rotation pouvait être produite sans l'emploi des liquides. A. Q.

(2) Samedi 8 décembre 1827.

d'après les premiers principes de géométrie, doit être le même autour du point de contact avec le plan.

Quant à l'explication donnée dans le *Courrier de la Meuse* (1), je crois qu'elle n'est pas assez générale; tout en effet y est attribué à l'action capillaire du liquide, qui, en prenant une forme plus ou moins irrégulière, fait pencher le centre de gravité à droite ou à gauche du plan de plus forte pente.

Vous voulez bien me demander quelles sont mes idées sur le phénomène qui nous occupe. Je ne puis que répéter ce que j'ai énoncé ailleurs (2); je pense que tout le secret se réduit à faire tomber le centre de gravité de la lentille à droite ou à gauche du plan de plus forte pente, ce qui peut avoir lieu de trois manières : soit parce que la lentille n'est pas homogène et symétrique autour de son axe; soit parce que la surface, sur laquelle la lentille doit se mouvoir, n'est pas parfaitement plane; soit enfin, parce que la lentille penche par l'effet de la capillarité ou par une autre cause. Vous voyez, monsieur, que l'idée que je me suis formée du phénomène, revient, à peu de chose près, à celle que vous en avez conçue vous-même, et que vous avez énoncée d'une manière si claire (3). Seulement vous ne paraissez pas admettre que la lentille puisse tourner par la seule action de la capillarité. Je ne suis pas de votre avis sur ce point; tout en admettant avec vous que la présence du liquide est très-utile, mais non *nécessaire*, pour empêcher le glissement. Quand je fis à Londres l'expérience, pour la première fois, je me l'expliquai à peu près comme je l'ai fait précédemment, et M. *Stratford*, secrétaire de la société astronomique, avec qui je la faisais, voulut bien, pour vérifier mes conjectures, se procurer une lame de verre parfaitement plane

---

(1) Vendredi 23 novembre 1827. L'article porte les initiales J. D. P. É. en M.

(2) Page 307 du IIIe vol. de la *Correspondance Mathématique*. Lettre adressée à M. Hachette, qui communiqua l'expérience à la *Société Philomatique* de Paris, et la rendit publique dans le n° 96 du *Globe*.

(3) Voyez l'article qui précède.

et des lentilles de différentes formes, dressées avec le plus grand soin. Nous prîmes toutes les précautions nécessaires pour que le liquide se répandit également entre les deux verres, et chaque fois la lentille glissait sans mouvement de rotation. Lorsque le liquide ne se répandait pas uniformément, le mouvement de rotation avait lieu.

La lentille descend obliquement dans le sens du mouvement; c'est-à-dire, du côté où ses différens points décrivent des arcs, en se dirigeant vers la partie inférieure du plan incliné. A mesure que le mouvement de rotation s'accélère, le point d'appui se déplace et la lentille tend à tourner autour de son axe permanent. Je me permettrai ici, monsieur, de ne pas être entièrement de votre avis sur un fait que nous aurons probablement étudié dans des circonstances différentes. Vous dites que le point de contact parcourt un petit cercle dont le centre se trouve sur l'axe du verre. Avec toute l'attention possible, j'ai trouvé généralement très-peu de déplacement dans le point d'appui. Pour mieux étudier le phénomène, j'ai fortement chargé la lentille par un des bords, et je l'ai fait tourner lentement; j'ai trouvé que le point d'appui ne se déplaçait d'une manière sensible, que quand la lentille, par l'accélération du mouvement, tendait à tourner autour de son axe de rotation permanent; jusque-là ce point décrit une ligne presque droite, et le centre de gravité descend continuellement en décrivant une ligne sinueuse qui serpente au tour d'elle. Du reste, je pense que le calcul seul peut donner une explication complète de toutes les particularités de ce singulier phénomène; qu'il était nécessaire cependant de bien reconnaître par l'expérience. C'est encore un problème de mécanique sur lequel nous appellerons l'attention de nos lecteurs géomètres.

Bruxelles, le 24 décembre 1827.

Sur les sensations produites dans l'œil par les différentes couleurs. Extrait d'une lettre de M. Plateau, candidat en sciences. (1)

....J'avais remarqué que si l'on faisait tourner un cercle divisé en secteurs égaux, alternativement jaunes et bleus, la teinte uniforme qui en résultait était presque complètement jaune ; il suivait évidemment de ce fait, que l'impression produite sur la rétine par le jaune, est plus énergique que celle que produit le bleu; en essayant de même le mélange par rotation des différentes couleurs, on obtiendrait donc des données sur les rapports des intensités de leurs impressions, et c'est ce que je me suis proposé de faire : je chercherai quel doit être le rapport des surfaces des secteurs différemment colorés pour produire des teintes le plus exactement intermédiaires que possible. Avant de commencer ces expériences, j'ai voulu voir quelle influence aurait le degré de foncé des couleurs, sur leur mélange par rotation, et j'ai observé le fait suivant, qui peut paraître assez singulier : c'est que pour presque toutes les couleurs, il existe une teinte, placée entre les teintes pâles et les teintes foncées, laquelle a, dans le mélange, le *maximum* d'influence : ainsi, pour fixer les idées, supposons qu'on veuille produire du violet par le mélange du bleu et du rouge, et que pour cet effet on ait divisé un cercle, comme je l'ai marqué (*fig.* 11) : c'est-à-dire, en donnant aux secteurs bleus une teinte uniforme, et en graduant au contraire les teintes rouges, en partant d'une teinte très-pâle vers le centre, jusqu'à une teinte très-foncée vers la circonférence; lorsque ce cercle tournera avec une rapidité suffisante, l'œil ne percevra plus que des bandes violettes concentriques; mais, en partant du centre, on verra le rouge dominer en plus, jusqu'à une certaine bande, après laquelle son in-

(1) Voyez le volume précédent, page 27.

fluence diminuera de plus en plus, jusqu'à la circonférence : ainsi on se tromperait, si l'on croyait que plus un rouge est intense, plus il doit avoir d'influence dans son mélange avec le bleu : celui du sang, de la pivoine, du géranium rouge, produiront moins d'effet que s'ils étaient mélangés d'un peu de blanc; le bleu jouit de la même propriété, mais le jaune fait exception.

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

Pont sous la Tamise. (1)

On désirait depuis long-temps un chemin souterrain de communication entre les deux rives de la Tamise, au-dessous du pont de Londres, parce que la circulation continuelle de la navigation, est un obstacle à la construction d'un pont. On a fait deux fois des essais pour y réussir depuis plusieurs années.

En 1798, feu M. R. Dodd projeta une semblable communication entre Gravesend et Tilbury. Mais on peut dire que les travaux en ont été à peine commencés; ils échouèrent; lorsqu'on creusa le puits, on rencontra une roche calcaire. En 1805, M. R. Vazie forma le projet d'un chemin souterrain entre Rotherhithe et Limehouse, il perça cette galerie près de la rivière, et lui donna cinq pieds de haut, deux pieds et demi de large, en la faisant supporter par une simple charpente, l'excavation fut poussée jusqu'à 1015 pieds, à une profondeur de 140 pieds sur la rive septentrionale, mais le terrain de la rive méridionale de la Tamise ayant été destiné, vers ce même temps, à l'établissement des docks de commerce, l'acte du parlement

---

(1) Les renseignemens qui suivent sont extraits d'une notice qu'on vend à l'entrée du *tunnel*. A. Q.

qui autorisait cette galerie étant d'ailleurs expiré, le pont parut être impraticable et fut abandonné.

En 1823, M. Brunel fixa son attentiou sur ce genre de travail : il jugea que l'exécution pouvait en avoir lieu, et il pensa sérieusement aux moyens d'y parvenir, ce qui devait accroître une réputation qu'il avait déjà acquise par d'autres grands ouvrages.

Une société de personnes capables de reconnaître les probabilités du succès, résolut de mettre ses plans à exécution, après avoir obtenu l'approbation de plusieurs autres personnes, qui, par le haut degré de leurs talens scientifiques, pouvaient en juger.

Tandis que l'acte d'institution de la compagnie du passage sous la Tamise était soumis à l'approbation royale, acte qui est daté du 24 juin 1824, le lit de la rivière fut sondé en plusieurs endroits dans la direction que le passage devait prendre ; on sonda aussi à une distance suffisante sur les deux rives, pour reconnaître s'il y avait moyen d'établir des puits profonds ; les tentatives que l'on fit, réussirent de la manière la plus encourageante.

On commença les travaux un peu à l'est de l'église de Rotherhithe ; on construisit un entourage ou circonvallation de bois formant un cercle d'environ cinquante pieds de diamètre ; un cylindre creux en briques, dont la maçonnerie était de trois pieds, fut cimenté de pouzzolane, on l'éleva à la hauteur de *quarante pieds*.

De cette circonvallation s'élevaient verticalement 48 verges de fer entourées de bois, elles étaient attachées au cylindre avec 35 listeaux cylindriques de 4 1/3 à 3 pouces, et au sommet de la maçonnerie, un autre entourage en bois était fortement attaché par des ancres aux endroits où venaient aboutir les verges de fer. La pesanteur de cet immense cylindre fut évaluée à 1000 tonneaux.

Le 2 mars 1825, le président, William Smith, Esq. M. P., accompagné des autres directeurs et de plusieurs savans, plaça dans une pierre de la maçonnerie une plaque de cuivre avec

une inscription et des monnaies, etc. Selon l'usage, cette opération fut considérée comme le commencement du travail.

Lorsque le cylindre fut fini, cette masse immense fut graduellement et avec succès enfoncée sans aucune lézarde ou crevasse, jusqu'à une profondeur d'environ trente trois pieds dans un lit d'argile compacte, on la reprit sous œuvre à une profondeur de septante-cinq pieds au-dessous de la surface.

Cette maçonnerie étant complètement établie, on y descendit le bouclier, espèce d'abri inventé par M. Brunel, pour protéger les ouvriers pendant l'excavation.

Nous n'avons pas l'intention de donner ici une description minutieuse de cet instrument, pour faire juger de son utilité. Il est de larges dimensions et peut peser une centaine de lastes. On le voit au dessin ci-joint (nº 3). Cet abri est fabriqué en fer, il y a douze divisions sur trois étages, qui forment par conséquent trente-six compartimens ou cellules, d'une largeur suffisante pour un mineur. Le sol supérieur est supporté par cet abri; chacune des divisions du bouclier est soutenue par deux larges sabots à la partie inférieure, de manière à soutenir le poids des trois compartimens ainsi que toute la pression supérieure.

Aussitôt qu'un mineur, en avançant, a retiré une certaine quantité de terre, il place une grosse planche et la visse par les deux extrémités contre le *bouclier*, comme on le voit au dessin nº. 2. Ces planches servent à empêcher les éboulemens à l'intérieur; on ne les retire pas pendant qu'on pousse en avant le compartiment, parce qu'elles sont fixées aux deux compartimens voisins, qui sont alternativement poussés en avant par les grandes vis qui s'appuient contre l'ouvrage en maçonnerie, que l'on continue pour servir de point d'appui. Ainsi, le dessus, le dessous, l'avant, l'arrière et les côtés sont toujours préservés de toute irruption des couches environnantes.

Dans toute la longueur du mur mitoyen, entre les arcades de l'Est et de l'Ouest, il y a plusieurs abris pour la facilité des piétons et pour les voitures en cas de besoin. Mais les voi-

tures de la rive septentrionale doivent passer par la galerie de l'Est, et celles de la rive méridionale par la galerie de l'Ouest.

Le passage sera entièrement éclairé par le gaz.

Une machine à vapeur sert à descendre les briques, les pierres, le ciment et tous les matériaux pour la construction de l'ouvrage, et tandis qu'on apporte ce qu'il faut pour le travail de l'arcade de l'est, on emporte le gravier, l'argile et les autres substances du sol, par l'autre galerie (1).

La descente pour les voitures ne sera point commencée avant que le passage ne soit achevé d'une rive à l'autre, et dans aucun cas le chemin des voitures, jusqu'à l'intérieur du passage, n'aura une inclinaison plus grande que quatre pieds six pouces sur cent pieds, et sera à peine sensible aux chevaux de trait.

Lorsque l'entrée du passage sera terminée, il aura l'aspect du dessin n° 1, et ses dimensions seront de 22 pieds, depuis les fondations jusqu'au sommet de l'ouvrage en briques, et sa largeur à l'extérieur de l'ouvrage en briques, sera de 37 pieds, (ce qui est six fois plus spacieux que le chemin fait en 1805). Les arches auront une hauteur de 15 pieds 6 pouces, depuis le sol des voitures au centre de la galerie; chaque arcade sera de 13 pieds 6 pouces de large, chaque trottoir sera de 3 pieds. La profondeur de l'eau au-dessus du passage pendant les hautes marées du printems est de 36 pieds.

Le passage sous la Tamise est l'objet d'un haut intérêt en Angleterre et à l'étranger. On s'en informe sans cesse sur le continent toutes les fois que quelqu'un arrive de Londres; et les étrangers qui viennent dans cette capitale, surtout les savans et les personnes d'un rang élevé, ont un grand soin de visiter cet ouvrage. Cependant les directeurs se sont trouvés dans la nécessité de limiter les admissions, et même de les

---

(1) La machine à vapeur est placée dans l'intérieur du cylindre en maçonnerie, par lequel on descend vers le passage souterrain. A. Q.

borner à des heures particulières et à des jours particuliers, jusqu'à ce qu'ils puissent prendre des mesures, afin que la curiosité du public jouisse de ce travail sans déranger les ouvriers. Chaque jour, les samedis et dimanches exceptés, toute personne qui paiera un schelling pourra descendre et s'avancer dans le passage de l'Ouest, sous le lit de la Tamise, aussitôt qu'il sera possible sans interrompre les nombreux ouvriers qui travaillent (1).

Le dessin représente :

N° 1. Les deux arches d'entrée du *tunnel* près de l'escalier pratiqué dans le cylindre en maçonnerie.

N° 2. L'ouvrage en briques de la galerie de l'est, terminé jusqu'au bouclier, et un chariot qui sert à recevoir les terres que retirent les mineurs; la grue qui sert à élever les briques, le ciment, etc., pour les ouvriers, et une vue du bouclier avec les ouvriers qui travaillent; le bouclier, qui, au moyen de vis et d'ais (connus sous le nom technique de *polling jacks*), trouve un ferme appui contre terre, jusqu'à ce qu'il soit nécessaire de le faire avancer.

N° 3. Figure du bouclier : on voit les ouvriers dans leurs compartimens.

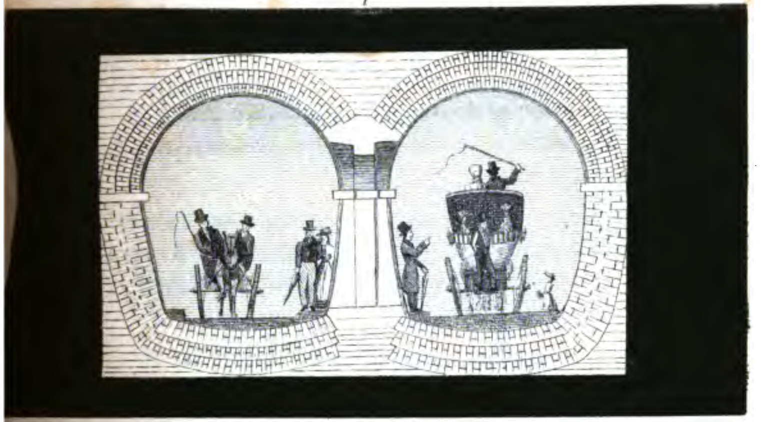
---

(1) Les travaux ont repris avec activité au commencement du mois d'octobre dernier, époque à laquelle on était parvenu à se rendre maître des eaux qui avaient inondé le *tunnel*.

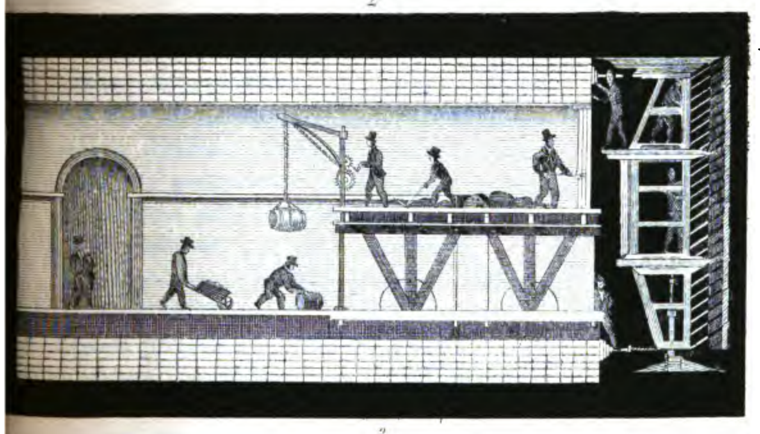
Nota. Pendant que cet article était sous presse, nous avons appris avec douleur qu'une nouvelle inondation avait suspendu les travaux. A. Q.

Pont sous la Tamise.

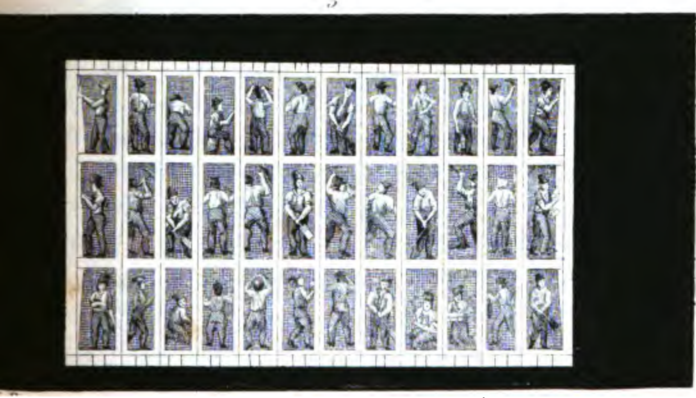
1



2



3



6 3 0 6 12 18 24 30 36 42

Pieds.

STATISTIQUE.

Tableaux des chances de la nouvelle Loterie, établie par arrêté de Sa Majesté, en date du 13 *novembre* 1827*;* par M. P.-F. Verhulst, Docteur en Sciences.

La nature de ce journal spécialement destiné aux sciences mathématiques, ne comportant aucune espèce de polémique sur des objets qui leur sont étrangers, nous nous bornerons à exposer ici quelques calculs relatifs à l'*espérance* du joueur, sans entrer dans les considérations morales qui tendraient à faire envisager la nouvelle loterie comme plus ou moins favorable au joueur et à la morale publique, que la loterie génoise.

D'après la théorie de l'*espérance mathématique*, il faut pour que le jeu soit parfaitement égal, que la somme de tous les prix qui peuvent échoir au joueur, multipliés respectivement par leur probabilité, soit égale à sa *mise*.

La différence entre ces deux quantités, divisée par la mise, est la mesure de l'avantage du banquier, ou, en d'autres termes, l'impôt prélevé par le gouvernement.

Pour ne pas compliquer inutilement la question par la distinction des classes, nous supposerons que le joueur ait pris un billet pour toutes les classes; ce cas est celui qui lui est le plus favorable; car s'il ne prend un billet que pour les deux premières classes, il est obligé de payer, outre le supplément convenable, une prime de deux florins en faveur de l'État, pour prendre part à la troisième classe. Le bénéfice de cette prime est donc purement éventuel pour le Gouvernement, et par conséquent n'est point susceptible d'une évaluation *a priori*.

NOMBRE DES PRIX.	APRÈS Déduction des 15 p. °/o que le gouvernement retient sur chaque prix de 100 fl. ou au-dessus.	PROBABILITÉ.	ESPÉRANCE.
1 Prix de . . . . . 100,000 fl.	85,000	1/50000	1. 7000
1 — — . . . . . 80,000 »	68,000	1/50000	1. 3600
1 — — . . . . . 40,000 »	34,000	1/50000	0. 6800
1 — — . . . . . 30,000 »	25,000	1/50000	0. 5100
2 — — . . . . . 25,000 »	42,500	2/50000	0. 8500
3 — — . . . . . 20,000 »	51,000	3/50000	1. 0200
3 — — . . . . . 10,000 »	25,500	3/50000	0. 5100
3 — — . . . . . 5,000 »	12,750	3/50000	0. 2550
5 — — . . . . . 2,000 »	8,500	5/50000	0. 1700
120 — — . . . . . 1,000 »	102,000	120/50000	2. 0400
120 — — . . . . . 400 »	40,800	120/50000	0. 8160
120 — — . . . . . 200 »	20,400	120/50000	0. 4080
620 — — . . . . . 100 »	52,700	620/50000	1. 0540
10,000 Prix valant ensemble. . . .	568,650		11. 3730

Ainsi l'espérance de *gagner le gros lot*, ne vaut réellement que 1 fl. 70 cents, et celle de gagner un prix quelconque ne devrait coûter que 11 fl. 37 cents $\frac{3}{1000}$, comme il est aisé de s'en assurer en multipliant la valeur moyenne de chaque prix, ou 568 fl. 65 cents, par la probabilité d'avoir un prix quelconque, c'est-à-dire par $\frac{1}{50}$, puisqu'il n'y a que 1000 prix sur 50,000 billets.

NOMBRE DES PRIMES.	APRÈS Déduction des 10 p. % que le gouvernement retient sur chaque prime au-dessous de 100 fl.	PROBABILITÉ.	ESPÉRANCE.
4,900 Primes affectées à la 1re classe à 15 fl. . .	66,150	$\frac{4900}{50000}$	1. 3230
4,900 — — à la 2me classe à 30 fl. . .	132,300	$\frac{4900}{50000}$	2. 6460
14,700 — — aux premiers nos sortant dans la 3me classe, auxquels il n'échoit pas de prix, à 22 fl.	291,060	$\frac{14700}{50000}$	5. 8212
24,500 — — aux derniers nos sortant dans la 3me classe, auxquels il n'échoit pas de prix, à 20 fl.	441,000	$\frac{24500}{50000}$	8. 8200
49,000 Primes valant ensemble . . .	930,510		18. 6100

L'espérance d'obtenir une prime quelconque, c'est-à-dire de recevoir le remboursement d'une partie de sa mise, vaut donc 18 fl. 61 cents.

Quant aux primes extraordinaires, leur probabilité se compose de deux élémens :

1° De la probabilité d'obtenir un prix quelconque ; 2° de celle d'obtenir un prix d'ordre déterminé. Elle sera donc égale au produit de ces deux quantités.

Par exemple, la probabilité d'obtenir la prime extraordinaire attachée au premier billet qui gagne un prix, est égale à la probabilité d'obtenir un prix quelconque, ou $\frac{1}{50}$, multipliée par celle de voir sortir le premier avec un prix le numéro que l'on a choisi, c'est-à-dire par $\frac{1}{1000}$, puisque le nombre total des prix est 1000.

NOMBRE des PRIMES EXTRAORDINAIRES.	APRÈS Déduction des 15 p. % que le gouvernement retient sur chaque prix ou prime de 100 fl. ou au-dessus.	PROBABILITÉ.	ESPÉRANCE.
1 Prime extr. pour le 1er billet qui obtient un prix. .	425	$\frac{1}{50} \times \frac{1}{1000}$	0. 0085
1 — — affectée au dernier n° de la 1re classe.	4,250	»	0. 0850
1 — — pour le 1er billet de la 2me classe qui obtient un prix. .	510	»	0. 0102
1 — — affectée au dernier prix de la 2me classe.	4,250	»	0. 0850
1 — — pour le 1er billet de la 3me classe qui obtient un prix. .	850	»	0. 0170
1 — — pour le dernier billet qui obtient un prix.	8,500	»	0. 1700
6 Primes extr. valant emsemble.	18,785		0. 3757 Espérance de gagner une prime extraordinaire quelconque.

Résume.

On voit par les tableaux précédens, que l'epérance totale du joueur égale

$$11.\ 3730 + 18.\ 6100 + 0.\ 3757 = \text{fl. } 30.\ 3589.$$

Telle devrait donc être sa mise, si l'on pouvait faire abstraction du bénéfice du gouvernement et du salaire des collecteurs. Or, le billet entier pour toutes les classes se paie 46 fl. : LA PERTE ESSUYÉE PAR LE JOUEUR S'ÉLÈVE DONC A 15. 6411 SUR 46, OU $34\frac{11}{4600}$ POUR 100.

Il est aisé de vérifier ce résultat, en faisant la somme des enjeux perçus par le gouvernement.

50,000 billets à 46 fl.	2,300,000 fl.
Total des prix, primes et primes extraordinaires, déduction faites des 15 et 10 p. %. .	1,517,945 »
DIFFÉRENCE.	782,055 fl.

Rapport de cette différence à la somme des enjeux

$$\frac{782055}{2300000} = \frac{34\frac{11}{4600}}{100}.$$

Si nous sommes bien informés, le gouvernement vend ses billets au collecteur, à raison de 40 fl. : Par conséquent, la part de celui-ci sur chaque mise est $\frac{6}{46}$ ou $\frac{13\frac{1}{23}}{100}$; ce qui réduit l'avantage du premier à $34\frac{11}{4600} - 13\frac{1}{23}$ pour 100.

Chaque loterie doit donc rapporter au trésor un bénéfice assuré de plus de 20 p. %, pris sur le montant de toutes les mises, sans compter le produit de la prime en faveur de l'Etat dont nous avons déjà fait mention au commencement de cet article.

Addition.

Nous joindrons aux calculs précédens, que M. *Verhulst* a bien voulu entreprendre à notre prière, un tableau des recettes faites par la loterie dans la ville de Paris, et des lots échus aux joueurs de cette même ville, depuis 1816 jusqu'en 1820 inclusivement. Nous l'avons extrait des *recherches statistiques* publiées par ordre de M. *De Chabrol.*

ANNÉES.	SOMMES		
	VERSÉES DANS LES BUREAUX.	REÇUES PAR LES GAGNANS.	ENTRÉES AU TRÉSOR.
1816	19,552,000 fr.	13,383,000 fr.	6,169,000 fr.
1817	21,461,000 »	16,513,000 »	4,948,000 »
1818	29,371,000 »	22,765,000 »	6,606,000 »
1819	27,524,000 »	22,306,000 »	5,218,000 »
1820	29,036,000 »	19,783,000 »	9,253,000 »
Totaux.	126,944,000 fr.	94,750,000 fr.	32,194,000 fr.
Moyenne. . . .	25,388,000 »	18,950,000 »	6,438,800 »
Nombre proportionnels . . .	1	0,74 »	0,26 »

Ainsi le trésor perçoit, à Paris, un peu plus que le quart des sommes versées dans les bureaux; c'est une espèce d'impôt que paient les joueurs pour avoir le plaisir de satisfaire

leur passion. On voit par les calculs faits plus haut, que le joueur paie, chez nous, ce plaisir un peu plus cher ; puisque plus du tiers de ce qu'il expose, passe au trésor ou devient le salaire des collecteurs. On comptait en 1827, que les loteries avaient rapporté chez nous :

ANNÉES.	ÉVALUATION.	VERSEMENT AU TRÉSOR.	DIFFERENCE EN PLUS DE L'ÉVAL.
1824	1,150,000 fr.	1,244,434 fr.	94,434 fr.
1825	1,240,000 »	1,467,126 »	227,126 »
1826	1,280,000 »	1,614,016 »	334,616 »

Ainsi, chaque année, grâce à l'aveugle cupidité des joueurs, les revenus de l'État ont dépassé de beaucoup l'évaluation des recettes présumées. A. Q.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Société des sciences naturelles de Liége.

On avait lieu de s'étonner, il y a peu d'années, de ce que Liége ne renfermât aucune société, s'occupant exclusivement des sciences naturelles : en effet, d'une part, la faculté des sciences de l'université se distingue par les talens des professeurs qui la composent, tandis que l'administration des mines attire en cette ville une foule de personnes qui s'attachent à l'étude de l'histoire naturelle ; d'une autre part, la fertilité du sol et les richesses minérales de la province, ses nombreuses exploitations, l'abondance et la variété des fabriques qu'elle possède, tout concourt à y inspirer le goût des sciences naturelles. En 1822, quelques jeunes gens qui appréciaient ces heureuses dispositions, résolurent enfin de remplir cette lacune, et fondèrent la société dont nous nous occupons ; M. *Gaede*, professeur d'histoire naturelle à l'université, leur montra une bienveillance particulière, et reçut le titre de membre honoraire ; bientôt M. *Walter*, inspecteur-général des universités, leur donna un local dans l'établissement destiné aux leçons académiques, et M. *Warnkoenig*, directeur de la bibliothéque, leur accorda toutes les faveurs qu'ils auraient pu attendre de lui.

Cependant cette société était encore peu nombreuse, et elle resta en quelque sorte ignorée jusque vers le milieu de cette année : à cette époque, un article inséré dans plusieurs jour-

naux lui donna l'élan. L'auteur de cet article, manifestait le désir de voir se former à Liége, une société qui se chargeât de faire l'analise des minéraux qu'on lui enverrait : cette tâche avait déjà été remplie en quelques occasions par la société des sciences naturelles, et elle s'empressa de prendre toutes les mesures possibles pour être à même de s'en acquitter dans tous les cas : elle s'associa de nouveaux membres, et publia par la voie des journaux, qu'elle s'engageait non-seulement à faire l'analise des minéraux, mais même à répondre autant qu'elle le pourrait à toutes les questions de chimie, de physique, de botanique, etc., que les habitans de la province lui adresseraient.

La société est composée de trois sortes de membres : elle renferme 1° des membres honoraires : ils sont en très-petit nombre et on ne leur impose aucune obligation; 2° des membres correspondans; 3° des membres effectifs; ceux-ci sont tenus d'assister à toutes les séances et de subvenir par leurs cotisations aux dépenses de la société; les membres correspondans deviennent membres effectifs lorsqu'ils habitent Liége, et ceux-ci deviennent membres correspondans lorsqu'ils quittent la ville; les uns et les autres sont obligés de présenter un Mémoire à la société, dans les trois mois qui suivent leur réception, et dans la suite, ils doivent en produire au moins un par an; du reste, tous les membres peuvent fréquenter le local de la société et y consulter un grand nombre de journaux scientifiques, les archives, les collections, etc.

Les séances ont lieu de quinze en quinze jours, et elles sont spécialement destinées à la lecture et à la discussion des Mémoires : lorsqu'un membre a fait un travail, il l'annonce à la société pour le lui communiquer à la séance prochaine; les Mémoires des membres correspondans sont envoyés au secrétaire et lus par l'un des membres effectifs nommés à cet effet; dès qu'une dissertation est lue à la société, elle doit y être déposée pour qu'on la mette en discussion à l'une des séances subséquentes; on la garde ensuite aux archives avec les observations qu'elle a provoquées.

Lorsqu'on demande à la société des renseignemens sur un objet quelconque, elle nomme aussitôt des commissaires chargés de faire toutes les recherches désirables et de consulter au besoin les professeurs en sciences de l'université, qui sont membres honoraires; déjà plusieurs essais ont été faits, à la grande satisfaction des personnes qui les avaient demandés.

On voit que cette société a un double but : les membres réunis en séance, cherchent à s'instruire mutuellement en se communiquant leurs idées, et en outre, ils tâchent de se rendre utiles à leurs concitoyens, en leur offrant tous les services qu'ils sont à même de leur rendre; sous ce dernier rapport, c'est une institution qui manquait absolument dans la province de Liége, pour ne pas dire dans tout le royaume, institution que l'industrie a droit de réclamer : parmi les personnes qui s'occupent d'exploitation ou de fabrication, il en est très-peu qui possèdent les sciences naturelles autant qu'il le faut pour leur état, et bien souvent le défaut de connaissances entrave leur industrie ou les expose à des pertes considérables; la société de Liége peut donc leur être d'un grand avantage : ainsi elle pourrait faire connaître aux exploitans la composition et les propriétés des diverses substances qu'ils désirent verser dans le commerce, l'utilité des unes, l'inconvénient des autres, la manière de perfectionner celles-ci, etc. Elle pourrait être utile à certains fabricans, en leur indiquant la différence entre les produits de leurs manufactures et ceux des autres fabriques du même genre, la manière d'imiter ceux-ci, de rendre ceux-là plus parfaits, le moyen de rendre les procédés de fabrication moins dispendieux, de remplacer des matières premières par d'autres qui sont à plus bas prix, etc. Espérons que les particuliers sauront apprécier ces ressources et que, de son côté, la société continuera à justifier leur honorable confiance.

(Cette notice, qu'on a bien voulu nous communiquer, donnera une nouvelle preuve de l'excellent esprit qui anime notre jeunesse, et suggérera peut-être l'idée d'associations semblables dans les principales villes du royaume).

Suite de l'analise de la théorie élémentaire des transversales, par M. GARNIER, professeur à l'Université de Gand. (*Voyez le vol. précédent.*)

Avant de poursuivre l'analise de cette théorie, que nous avons déjà étendue aux huit premiers chapitres (*Correspondance*, IIIe vol., nos I, II et III), nous remplirons quelques lacunes que des recherches postérieures nous ont fait remarquer et remplir dans le manuscrit.

Dans une dernière lecture, nous avons fait quelques changemens d'ordre et additions dans les trois premiers chapitres; mais ces variantes n'en apportent aucune dans le compte que nous avons déjà rendu de cette partie de l'ouvrage.

CHAPITRE IV. Théor. IX. La proposition fondamentale en fait de projection stéréographique, consiste en ce que « si, d'un » point pris sur l'hémisphère destinée au tracé des figures » originales, on mène des tangentes MT et M*t* à la sphère, » la perspective TM'*t* sera égal à l'angle TM*t*. » Ce théorème de *Ptolomée*, d'une grande importance dans la théorie dont il s'agit ici, a été établi d'une manière fort simple par l'astronome *Leadbetteo*, l'un des commentateurs de *Newton* : dans cette troisième démonstration, que nous avons empruntée d'une note de M. *Mathieu* (*Histoire de l'Astronomie* au XVIIIe siècle, par *Delambre*, pag. 96), nous avons fondu une note de l'auteur qui la complète.

CHAP. VI. « Un des avantages importans de la théorie des » projections, dit M. *Dandelin* (Mémoire cité *Corresp.*, IIIe vol. » pag. 108, note), c'est qu'en conservant la position relative » des divers points d'un système, on peut néanmoins changer le système de projections, c'est-à-dire, la position de l'œil » et le plan du tableau, d'une infinité de manières, expédient » qui peut amener des simplifications importantes dans le » raisonnement et les opérations; ce renversement de projections offrira souvent des applications importantes, comme » nous allons le montrer par quelques exemples.

» Théor. XI : Si, sur la circonférence d'un cercle, on prend » six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, et un septième *g* quelque part sur » son plan, on peut tracer les cercles *abg*, *bcg*, *cdg*, *deg*, *efg* et » *fag*, et il arrive que les intersections des cercles opposés, sa» voir : *abg* et *deg*, *beg* et *efg*, *adg* et *fag*, se trouveront sur un » septième cercle passant aussi par *g*. » Comme la démonstration telle qu'on la trouve dans le Mémoire, est d'une concision académique, qui laisserait au lecteur le mérite de l'invention, nous l'avons éclairée par des développemens et une figure. On démontre de la même manière le théorème suivant : si, sur une circonférence, on prend six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et un septième *g* quelque part sur son plan, on pourra mener par ce point *g* six cercles tangens à la première circonférence en *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* : considérant ces six cercles comme un hexagone circonscrit, et menant par les sommets opposés trois cercles assujétis à passer par *g*, ces cercles se couperont en un même point, propriété analogue à celle dont jouissent les trois diagonales de l'hexagone circonscrit. La première suppose la propriété connue des côtés opposés de l'hexagone inscrit, de se couper en trois points situés en ligne droite. Le même expédient pourrait s'étendre à un système de huit cercles, qui ayant pour cordes les côtés de deux quadrilatères, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, se couperaient tous en un même point, qu'on prendrait pour point de vue ; c'est ainsi que, dans la géométre descriptive, on a tiré quelques conséquences remarquables des projections de projection.

Nous avons encore ajouté un douzième théorème, ayant pour énoncé : si dans un tronc de pyramide triangulaire, on prolonge les deux côtés opposés situés dans chaque face ; qu'ensuite on mène les diagonales des trois quadrilatères formés sur les trois faces du tronc, on aura six points situés dans un même plan XI, qui a la propriété de diviser chacune des trois arêtes du tronc, savoir : AA′, BB′ et CC′, en segmens proportionnels à ceux que le point S de concours de ces trois arêtes, forme sur les mêmes droites, lorsque les trois arêtes AA′, BB′ et CC′ sont tracées sur un même plan ; les six points sont encore dis-

posés sur ce plan, de telle sorte, qu'en les prenant trois à trois dans un ordre déterminé, chacun de ces groupes de trois points appartient à une même droite. Enfin, lorsque ces six points sont placés sur une même droite, cette droite coupe chacune des trois droites AA', BB' et CC', toujours situées dans un même plan, en deux segmens proportionnels à ceux que forme le point S sur ces droites. Dans un quatrième corollaire, nous appliquerons le précédent aux coniques, ce qui conduit à plusieurs propriétés remarquables de ces courbes, et entre autres, à celle de l'hexagone circonscrit, relative à ses trois diagonales. On tire encore de ce théorème cette autre propriété déjà connue, que si d'un point quelconque S, on mène, dans un même plan, trois droites quelconques SA, SB et SC, et qu'on fasse deux triangles ACB et A'C'B', dont chacun ait ses trois angles sur ces trois droites, les trois concours des côtés de ces triangles, seront toujours en ligne droite.

Ce chapitre est terminé par une extension du théorème XII, à un tronc de pyramide quadrangulaire : en le partageant par des plans diagonaux en quatre troncs triangulaires, prolongeant les côtés correspondans des bases opposées jusqu'à leurs rencontres en m, n, p, m', n' et p'; tirant dans chacune des faces des diagonales qui se croisent en s, q, r, s', q' et r', on arrive à cette conclusion « que les six intersections m, n, p, » m', n' et p', et les six croisemens s, q, r, s', q' et r', des » diagonales, sont sur seize alignemens, de trois points chacun, lesquels sont situés dans quatre plans. » La notation qui sert à démontrer cette propriété, est telle qu'elle se prête avec la même facilité à un tronc polygonal quelconque.

Dans le chap. VI, nous avons intercalé la solution de ce problème : « Une section conique non décrite, étant donnée par » cinq points, dont trois appartiennent à une circonférence » de cercle, trouver directement, et en n'employant que la rè- » gle, le quatrième point d'intersection des deux courbes. » Cette solution s'applique évidemment au cas où les deux courbes sont des coniques, pourvu que l'une d'elles soit entièrement décrite; dans le cas contraire, il faudrait, indépendamment des

trois points donnés communs aux deux courbes, en connaître deux autres quelconques sur la seconde. Le onzième chapitre offre les propriétés de trois coniques qui se coupent en quatre points.

Dans les numéros suivans, nous reprendrons la suite de cette analise qui, à l'avenir, sera définitive.

Library of useful knowledge; Bibliothéque des connaissances utiles.

Il s'est formé depuis quelque temps, à Londres, une association d'hommes éclairés qui ont pour but de répandre les connaissances utiles, jusque dans les dernières classes de la société. L'un des membres les plus honorables, M. *J. L. Goldsmid*, avait fait connaître chez nous cette association dès sa naissance, en communiquant le règlement à MM. *Cornelissen*, *De Bast*, *Le Maire*, etc., avec qui il s'était mis en relation. Un extrait de ce règlement fut inséré dans le *Messager des Arts et des Sciences* (1); on y annonçait la publication périodique de traités sur les différentes branches des connaissances humaines. « Chaque traité scientifique devait contenir une exposition des principes fondamentaux de quelque branche de science, les preuves et les explications de ces principes; leur application; la pratique et leur usage dans l'application des faits ou des apparences. » (2)

Nous avons eu occasion de nous procurer depuis plusieurs de ces traités, qui nous ont paru très-propres à réaliser les espérances qu'avait fait naître une association aussi éminemment recommandable. Dans l'impossibilité où nous sommes d'analiser ces différens traités, nous nous contenterons d'indiquer ceux qui avaient paru au commencement de novembre 1827.

(1) 1re et 2e livraisons, 1827.

(2) Chaque traité se compose d'environ 32 pages in-8°, imprimées sur deux colonnes, avec des gravures en bois intercalées dans le texte.

De l'objet, des avantages et des plaisirs de la science. (Traité préliminaire).

L'Hydrostatique, contenant des notions préliminaires sur les fluides, l'évaluation des pressions, les pesantenrs spécifiques, l'aréométrie, la théorie des siphons, et de l'attraction capillaire.

L'Hydraulique : du mouvement des fluides dans des canaux et dans des ajutages ; des machines pour l'élévation des eaux; de la force des liquides en mouvement.

Pneumatique : de la pesanteur et de l'élasticité de l'air; de la machine pneumatique; de la pompe de compression; du fusil à vent; du son.

Mécanique : le Ier traité renferme la théorie des premiers moteurs, des agens mécaniques. Le IIe, les élémens de la mécanique, qui présentent deux sous-divisions, de 32 pages chacune. Le IIIe, le frottement et la rigidité des cordes.

Mécanique animale, ou un examen de la structure et des organes mécaniques des animaux.

Chaleur : Ier traité; des causes de la chaleur; du thermomètre; de la conductibilité de la chaleur; du pouvoir réfléchissant. IIe, de la chaleur spécifique; de la quantité de chaleur absolue que renferment les corps; de l'eau sous l'état solide, fluide et aériforme; de l'évaporation; de la distillation et des moyens artificiels pour abaisser la température.

Aperçu du NOVUM ORGANON SCIENTIARUM, *de Bacon*, on nouvelle méthode d'étudier les sciences.

Optique : Ier traité; notions préliminaires; de la réfraction; des prismes et des lentilles; de la formation des images; de la décomposition de la lumière.

Il existe à Londres une autre collection pour le peuple, intitulée : *Catéchisme de Pinnock*. Quoique cette dernière collection renferme quelques traités rédigés avec soin, il ne faut cependant pas la confondre avec la première; on y trouve trop d'erreurs et des notions trop incomplètes sur les différentes branches des sciences. Les catéchismes de *Pinnock* sont rédigés pour les enfans; on doit regretter d'autant plus vivement les erreurs qui s'y trouvent.

Almanach Populaire du royaume des Pays-Bas, pour l'an 1828, ou exposé des connaissances utiles. Bruxelles, chez Bols-Wittouck.

Ce petit ouvrage, destiné au peuple, est rédigé avec précision et clarté. On y trouve, dans un cadre étroit, un grand nombre de notions utiles sur l'agriculture, les poids, les mesures, le commerce, l'économie, etc. On aurait tort de se montrer difficile sur les petites imperfections qu'on y rencontre encore. Peut-être l'auteur ferait-il bien de remplacer par la suite son article *Pronostics du temps*, par quelques autres notions de physique. La météorologie est encore trop peu avancée pour pouvoir poser en principe, comme il le fait, les résultats des observations sur les vents ou sur la forme des nuages. Il faut être très-circonspect sur la nature des connaissances que l'on transmet au peuple; peut-être l'auteur, tout en louant avec justice les avantages des sociétés d'assurances, fait-il sentir un peu trop qu'il n'est point étranger à la société de l'*Union Belge*. L'homme impartial se demandera pourquoi l'on n'a point mentionné les autres sociétés du royaume, et s'il entrevoit qu'il y a des prédilections marquées, il aura moins de confiance dans les autres renseignemens qu'on veut lui transmettre.

De la justice de prévoyance, par M. E. Ducpétiaux; à Bruxelles, chez *J. J. Cautaerts et comp.*, in-8°, 1827 (1).

M. *Ducpétiaux*, dont le nom est honorablement connu par un ouvrage récemment publié *sur la peine de mort*, s'est occupé d'examiner, dans la brochure que nous annonçons, l'influence de la misère et de l'aisance, de l'ignorance et de l'instruction sur le nombre des crimes. On ne lui reprochera pas de s'égarer dans de vains raisonnemens; c'est dans les documens officiels, dans les statistiques, qu'il va demander au passé des instructions pour l'avenir; et des nombreux résultats numériques qu'il cite, il cherche à déduire cette vérité, que la

---

(1) M. *Ducpétiaux* a publié depuis un second ouvrage sur le même sujet.

moralité, que la sécurité d'un peuple, dépendent surtout du degré d'aisance et de lumières qui y est répandu. Quand on a reconnu le mal dans sa source, il devient plus facile de le prévenir; mais quels sont les moyens qu'il faut employer? M. *Ducpétiaux* en indique trois : 1° Écarter les motifs qui provoquent à l'action; 2° éclairer la liberté, pour résister à ces motifs provocateurs; 3° fournir à l'homme des moyens suffisans pour combattre les motifs provocateurs dans les délibérations de la liberté. Il est remarquable que le degré d'aisance et de lumières, qui donne en quelque sorte la mesure de la moralité d'un peuple, doive être considéré aussi, d'après toutes les observations récentes, comme la mesure de la mortalité à laquelle le peuple est exposé. Nous regrettons de ne pouvoir suivre l'auteur dans les développemens intéressans auxquels il est conduit par la question dont il traite; ces discussions sortiraient trop du cadre que nous nous sommes tracé. Nous avons voulu surtout indiquer l'heureux emploi que l'on peut faire des recherches statistiques en les citant comme des données d'expérience, pour établir les vérités les plus utiles à l'ordre social.

— Le *Philanthrope* et l'*Ami de la Patrie*, recueils publiés par les commissions des sociétés de bienfaisance, établies à Bruxelles et à La Haye, continuent à présenter des détails statistiques fort intéressans sur nos colonies. D'après le relevé de la population dans chaque établissement colonial des provinces septentrionales, on comptait en tout 7184 individus au premier novembre 1827, et 7234, au 1er décembre de la même année. D'après le *Philanthrope*, le nombre des colons, dans les colonies libres, s'élevait, à la fin du mois d'août dernier, à 526 individus, et à la fin d'octobre, à 540. Dans la colonie de répression de la mendicité, à la même époque, la population s'élevait à 810 individus.

— M. *Somerhausen*, à qui l'on doit plusieurs ouvrages utiles, vient de publier une nouvelle *Carte figurative* des proportions statistiques entre les provinces des Pays-Bas, dressée d'après les méthodes de MM. *Crôme* et *Hassel*. Des carrés coloriés,

représentent les grandeurs relatives des provinces; et des cercles concentriques représentent les provinces d'après leur population proportionnelle, en sorte que, plus une province compte d'habitans par lieue carrée, plus le cercle qui la représente est petit : on compte dans la Flandre orientale, par lieue carrée, 10715 habitans; et dans la province de Drenthe, 1301 : les surfaces des cercles doivent donc être en rapport inverse de ces nombres, ou comme 1 est à 8 environ. C'est sans doute par erreur, que les surfaces ont été faites dans le rapport de 1 à 100 à peu près; il eût été bon de conserver strictement les proportions; il eût été à désirer aussi, que l'auteur eût indiqué les motifs qui lui ont fait préférer l'évaluation de l'étendue des provinces, d'après le baron de *Liechtenstern*, à celle qui a été présentée aux États-Généraux.

De Meetkunst op de Kunsten en Ambachten toegepast. La Géométrie appropriée aux Arts et Métiers, par M. *Lemaire*, professeur extraordinaire à l'université de Gand. In-8°.

— *Résumé* du cours normal de géométrie et mécanique des arts et métiers, etc., par M. *Dupin*, ou texte des leçons données par M. *Pagani*, professeur extraordinaire à l'université de Louvain. In-12.

Les cours de mécanique industrielle n'ont pas été accueillis chez nous avec moins de faveur que chez nos voisins. L'artisan peut trouver aujourd'hui une instruction facile et gratuite dans nos principales villes; et grâce au zèle des professeurs qui sont chargés du soin de la donner, ses résultats peuvent s'étendre jusque dans les campagnes. Nous avons déjà eu occasion d'annoncer dans ce journal, les *leçons* de M. *Dandelin*, professeur à l'école royale des mines de Liége, celles que M. *Pagani* avait commencé à publier à Louvain, et celles que M. *Vander Jagt* a fait paraître à Amsterdam, sous le titre : *Grondbeginsels der Meetkunst*. M. *Lemaire* vient de publier également le texte des leçons de mécanique industrielle qu'il donne à l'université de Gand. Jusqu'à présent, quatre leçons seulement ont paru; elles traitent de la ligne droite, du cercle, des angles, des triangles et des parallèles; de nombreux exemples de calcul et

de construction servent de développement à la théorie, qui est présentée avec concision et clarté. M. *Lemaire* a fait usage des *Leçons de Mécanique* de *Dupin*, comme M. *Vander Jagt*, et il l'a fait avec discernement et conscience. M. *Pagani* s'est également servi de l'ouvrage de *Dupin*; mais pour en présenter le résumé. M. *Pagani* a omis les démonstrations des théorèmes, et s'est contenté de présenter la substance de l'ouvrage français « pour que les libraires puissent le livrer à un prix » modique, condition nécessaire à remplir pour qu'il puisse » se répandre parmi la classe ouvrière. » On sent que ce résumé est l'ouvrge d'un géomètre; mais on trouvera peut-être que l'auteur a trop visé à la concision. Nous croyons avec lui, que l'artisan peut fort bien se passer des démonstrations du peu de vérités mathématiques qu'il est dans le cas d'employer, mais il faut qu'il en comprenne l'usage par des exemples. Les formules surtout ne peuvent lui devenir intelligibles, qu'autant qu'on y applique les nombres. Il nous semble que M. *Pagani*, dans la publication de son premier ouvrage, que nous regrettons de ne pas voir terminé, avait mieux senti ce qui convient au peuple.

QUESTIONS.

I. Si, d'un point pris sur le grand axe d'une parabole, on mène deux rayons vecteurs à la courbe, on formera un secteur que l'on demande de partager en parties proportionnelles à des nombres donnés.

On pourra généraliser la solution en l'étendant aux autres sections coniques.

II. Premier cas. Six joueurs concourent à gagner un enjeu aux conditions suivantes : A et B tirent chacun une boule d'une

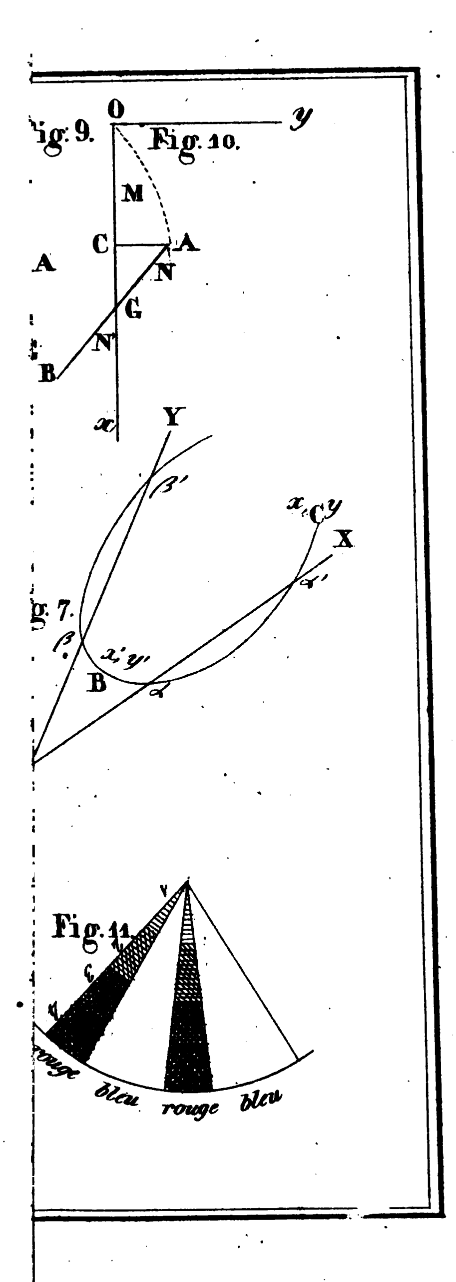
urne, dans laquelle il n'y a qu'une boule blanche et une boule noire. Celui qui a tiré la noire est marqué d'un point, et l'autre joue avec C à la même condition. — Le tireur de la boule blanche joue avec D, et ainsi de suite, marquant chaque fois d'un point le joueur qui a tiré la noire. — Le dernier joueur continue avec le premier, et chaque fois que l'un des joueurs a 5 marques, il est censé mort. Le jeu est fini quand il ne reste plus qu'un joueur. — Un obstacle interrompt la partie, on demande dans quel rapport il faut partager l'enjeu.

Second cas. Les six joueurs tirent à la fois, chacun une boule d'une urne, dans laquelle il y en a 5 blanches et une noire. La boule noire donne un point sinistre à celui qui la tire. Un joueur est mort quand il a 5 points sinistres. — A chaque mort, on supprime une boule blanche. — Le jeu finit, comme dans le premier cas. — Comment faut-il partager l'enjeu, lorsque la partie est interrompue? — Dans les deux cas, l'adresse des joueurs est égale.

III. On sait que la *moyenne arithmétique* entre n nombres, est la $n^{\text{ième}}$ partie de la somme de ces n nombres, et que la *moyenne géométrique* entre n quantités positives, est la racine $n^{\text{ième}}$ du produit de ces n quantités. Cela posé:

1° Si n nombres, ne sont pas tous égaux entre eux, la puissance $m^{\text{ième}}$ de leur moyenne arithmétique, sera plus petite que la moyenne arithmétique des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des mêmes nombres;

2° Si n nombres ne sont pas tous égaux entre eux, la moyenne arithmétique de leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$, sera moindre que la moyenne géométrique de ces mêmes puissances.



ig. 9.
Fig. 10.
O
y
M
C
A
A
N
G
N'
B
x
Y
β'
x, C y
X
α'
g. 7.
β
x' y'
B
α
Fig. 11.
rouge
bleu
rouge
bleu

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Problème concernant le jeu de Billard (1).

Si une bille posée sur un billard reçoit un choc suivant une direction connue, elle se mettra en mouvement, et s'il n'y avait ni frottement, ni défaut d'élasticité, ni aucune des autres causes qui retardent son mouvement, elle se mouvrait à l'infini, à moins qu'elle ne tombât dans une blouse.

Cela posé, on demande :

1° En supposant la bille et les blouses réduites à des points mathématiques, est-il possible que la bille se meuve à l'infini en parcourant des chemins différens, sans tomber dans une blouse ;

2° De déterminer parmi les points de contact que la bille aura avec les bandes du billard, quel sera le $n^{ième}$ sur une bande déterminée ;

3° Ce $n^{ième}$ point de contact sur une bande déterminée, quel rang ou quel numéro aura-t-il parmi l'énumération générale des points de contact, sans distinction de bandes. En comptant par exemple 1 au premier point où la bille rencontre une bande quelconque, 2 au deuxième point, 3 au troisième, etc. ;

4° Quelle sera à ce point la direction du mouvement de la

(1) Cette notice est de M. *De Behr*, ingénieur en chef du waterstaat, et ancien élève de l'École Polytechnique.

bille ; quel sera le chemin parcouru. La solution de ce problème est remarquable par la grande simplicité.

La première impulsion tend à éloigner la bille de deux bandes, et à l'approcher des deux autres.

Appelons A l'angle formé par les deux premières, et C celui formé par les deux secondes (*fig.* 1, *pl. III*); appelons B la blouse angulaire adjacente à la grande bande, dont l'extrémité opposée est déjà marquée A. Le quatrième angle sera désigné par D.

Par le point C menons une parallèle à la direction de l'impulsion, jusqu'à la rencontre en A_1 de la grande bande opposée; cette parallèle coupera la petite bande AD (1) en un point G.

Si l'on achève le rectangle A_1BCD_1, il sera facile de voir que toutes les lignes à parcourir par la bille seront respectivement parallèles aux deux diagonales A_1C, BD_1. Ainsi, en menant par ce point de contact de la bille avec la bande, des parallèles à ces diagonales, on aura les directions du mouvement avant et après le choc de la bille contre les bandes.

Par le point M, position primitive de la bille, menons une ligne P_1N suivant la direction de l'impulsion. La bille peut être considérée comme partie du point de rencontre N de la ligne PMN avec AB, et avoir ainsi en P_1 le premier point de contact avec la bande BC.

Les lignes AN, CD, AA_1, AG sont donc connues. Désignons les points successifs de contact de la bille avec la bande BC, par

P_1^1 P_1^2 P_1^3 P_1^4 ...

avec la bande CD par P_2^1 P_2^2 P_2^3 P_2^4, etc.

— DA — P_3^1 P_3^2 P_3^3 P_3^4, etc.

— AB — P_4^1 P_4^2 P_4^3 P_4^4, etc.

---

(1) Ou son prolongement.

Pour trouver ces points de contact, on prolongera

AB	indéfiniment	vers	B
CD	—	—	D
AD	—	—	D
BC	—	—	B

ayant pris

$$CP_2^1 = A_1N \text{ et } DP_3^1 = CP_2^1 + AG$$

on divisera	AB prolongée	en parties égales à	$2AA_1'$	à partir de N
—	CD	—	$2AA_1^1$	P_2^1
—	AD	—	$2AG$	P_3^1
—	BC	—	$2AG$	P_1^1

l'on marquera les points de division sur AB des lettres P_4^1 P_4^2 P_4^3, etc., et ceux des trois autres lignes en accentuant les lettres, comme il a été indiqué ci-dessus.

Enfin, si l'on enveloppe chacune des bandes par son prolongement, comme on le ferait, si ce prolongement était un fil qu'on voulût envelopper sur une carte supposée représenter la bande; les lieux que les points de division occuperont sur les bandes après l'enveloppement, seront les points de contact cherchés; leurs accens indiquent leur ordre d'arrivée sur chaque bande, considérée abstractivement des trois autres.

Il existe aussi un moyen très-simple de déterminer le rang que chacun de ces points de contact doit avoir dans l'ordre ou dans l'énumération générale, ce qui de prime abord paraît présenter quelque difficulté.

A cet effet, divisons chacune des lignes AB, CD, BC, AD, prolongées en parties égales à la longueur des bandes respectives dont elles sont le prolongement; les quatre points A, B, C, D, étant l'origine de la division : AB prolongé sera donc partagé de manière que AB=BA'=A'B'=B'A''=A''B''=etc., ainsi des autres lignes.

On formera ensuite pour déterminer les numéros généraux des points de contact

sur	AB	la progression	4	8	12	16	20	24	etc.
—	CD	—	2	6	10	14	18.	22	
—	AD	—	3	7	11	15	19	23	
—	BC	—	1	5	9	13	17	21	

Si la bille touchait toujours successivement les quatre bandes, il est évident que le premier contact sur AB serait le quatrième dans l'ordre général, le deuxième sur AB serait le huitième en les comptant tous, et ainsi de suite; de sorte que les nombres ci-dessus seraient les numéros généraux; et le numéro du terme de la progression correspondrait à l'ordre particulier sur la bande que l'on considère : mais la bille passant quelquefois d'une bande à la bande opposée, sans toucher l'intermédiaire, les nombres précédens ont besoin d'une correction.

Après avoir marqué les points de division avec leurs accens sur le prolongement des quatre bandes, comme il a été expliqué ci-dessus, on observera avec soin pour chaque point, le nombre de longueurs de bande qu'il a laissées derrière lui. Soit ce nombre $= n$.

S'il s'agit de AB ou de CD, il faudra ajouter n au nombre correspondant des deux progressions, pour avoir le numéro d'ordre général, et il faudra au contraire ôter n du nombre correspondant de la progression, s'il s'agit des deux autres lignes.

Par exemple le point $P4^5$ ayant laissé derrière lui $A'B + BA' + A'B' = 3A$, il faudra augmenter le 5ème terme de la progression de 3; ainsi le 5e point de contact sur AB sera le 23e dans l'ordre général, parce que le 5e terme de la progression arithmétique relative à AB est 20, et que $20 + 3 = 23$. De même le point P_1^3 sera le 8e dans l'ordre général, parce que le 3e terme de la progression qui lui correspond est 9, et que $9 - 1 = 8$.

On aura donc pour tous les points de contact, leur numéro d'ordre particulier et leur numéro d'ordre général.

Par chaque point de contact, on mènera des parallèles aux diagonales A_1C, BD_1 du rectangle supplémentaire A_1BCD_1, et les parallèles exprimeront la direction du mouvement avant et après le choc.

Reste à déterminer laquelle des deux parallèles correspond au mouvement avant le choc.

A cette fin, on verra si le nombre *n* dont nous avons parlé, est pair ou impair. — S'il est pair, le mouvement de la bille est direct en ce point, ou dans le même sens que l'impulsion primitive; la parallèle à A_1C est donc la direction avant le choc contre l'une des bandes BC ou AD, et l'autre parallèle sera la direction de la bille réfléchie: s'il s'agit des deux bandes AB, CD, ce sera le contraire. Si le nombre *n* est impair, le mouvement sera rétrograde, ou en sens inverse de ce qu'il était primitivement. La parallèle à A_1C est alors la direction de la bille après avoir été réfléchie par les bandes BC, CD, et avant de l'être par les deux autres bandes.

La bille aura donc un mouvement oscillatoire ou alternatif, et quant à la question de savoir si la bille tombera dans une blouse ou n'y tombera jamais, il suffit de voir si, parmi les points de division dont on a parlé plus haut, il s'en trouve un qui tombe sur les points ABCD ou A'B'C'D', etc., s'il s'agit des blouses angulaires; ou sur les milieux des distances AB, CD, A'B, etc., s'il s'agit des blouses du milieu.

Il y a plus; on pourra reconnaître par la construction des points relatifs à AB, si la bille s'est perdue dans l'une des blouses C ou D. Supposons qu'en construisant sur AB, on prolonge les points $P^1_4 P^2_4 P^3_4$ etc., on trouve deux points successifs, placés à égales distances, l'un au-delà, l'autre en-deçà de l'un des points A, A', B, B', etc, ces deux points P se confondent après l'enveloppement, et comme ils sont séparés par un point A ou B, le mouvement serait en sens contraire : or une bille ne peut revenir au même point et en sens contraire que dans un seul cas, savoir, après avoir été dans un angle, cas où elle est

réfléchie sur elle-même, s'il n'y a pas de blouse. Il n'y aura point des difficulté de reconnaître le rang ou l'indice à donner au contact de la blouse, dès l'instant qu'on aura observé le rang général du point double.

Si l'on veut avoir égard à la dimension de la blouse, en conservant l'hypothèse du point pour la bille, il suffira de porter sur les bandes prolongées, à droite et à gauche de chaque point A, B, C, D, etc., une ouverture de compas égale à la demi-largeur des blouses, et de considérer la bille comme perdue lorsque l'un des points de division tombera en dedans de ces limites,

La commensurabilité ou l'incommensurabilité des lignes AB, CD, AN, AA_1, AG, dont quatre font connaître la cinquième, décidera s'il y aura des superpositions de points. Prenons, par exemple, la bande AB supposée pour plus de simplicité n'avoir que deux blouses, savoir, une à chaque bout. Supposons que $2AA_1$ soit commensurable avec AN, et que AB soit incommensurable; jamais l'un des points A ou B ne se confondera avec l'un des points P_4^1, P_4^2, P_4^3, etc., donc, jamais la bille ne pourra tomber dans les blouses A ou B, ni même dans celles C ou D, parce que les points doubles sont impossibles sur la direction AB.

Si les lignes sont commensurables (1), la bille finira par tomber dans une blouse, et dans le cas où il n'y aurait pas de blouses, elle finira par aller dans un angle; alors elle sera réfléchie sur elle-même, parcourra en rétrogradant le même chemin, jusqu'à ce qu'elle donne de nouveau dans un autre coin, puis reviendra au premier, et ainsi à l'infini.

On n'a pas égard ici au cas particulier, où la bille revient au point de départ à la fin de la première révolution, alors le point de départ se confond avec P_4^1, le rectangle supplémen-

---

(1) Et que $\overline{AB}$ et $\overline{2AA_1}$ n'aient pas entre eux de plus grand commun diviseur que celui de AB, $2AA_1$ et AN.



taire est égal au rectangle de billard, ou il est infini quand la bille est lancée parallèlement à l'une des bandes.

Lorsque le diviseur commun de AB et de $2AA_1$ sera plus grand que le plus grand diviseur des trois lignes susmentionnées, la bille ne se rendra pas dans un angle; mais elle se rendra au point de départ et suivra à l'infini le même chemin dans le même sens.

L'expression du chemin parcouru dès l'origine du mouvement n'est pas moins remarquable : car chaque fois qu'elle revient à la bande d'où elle est censée partie, le développement du chemin parcouru est égal à la somme des diagonales du rectangle supplémentaire A_1BCD_1; ainsi au point P_4^{15} la bille aura parcouru 15 fois la longueur des deux diagonales précitées.

Si l'on veut traduire les résultats en langage algébrique, on fera

$$AB = L$$
$$BC = l$$
$$AA_1 = a$$
$$AG = b$$
$$AN = c$$

Appelant u la distance de l'un des points P, de P_4^m, par exemple, au point A, sur le développement de la bande AB, on aura

$$u = c + 2ma \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{L} = \frac{c + 2ma}{L}.$$

Soit le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{u}{L}$ égal à q et le reste égal à r :

Si *q est impair*, r sera la vraie distance du m^{me} point de contact sur la bande AB, à mesurer du point B.

Ce point sera le $(4m+q)^{ème}$ dans l'ordre général, et le mouvement sera rétrograde.

Si *q est pair*, il faudra mesurer la distance r à partir de A.

Son rang général sera le même, mais le mouvement sera direct.

Il est facile de démontrer que l'équation $\frac{c+2ma}{L}=\frac{u}{L}$ peut toujours être résolue en nombres entiers quand les quantités qui la composent sont des nombres entiers (ce qui arrive lorsque les lignes sont commensurables), et quand $2a$ n'a pas de diviseur commun avec L. Dans ce cas, on aura un reste nul, et la bille tombera dans une blouse angulaire, savoir dans la blouse A, si le quotient est pair, et dans la blouse B, s'il est impair. La bille rétrogradera par le même chemin, s'il n'y a pas de blouses dans les angles, jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau l'un des autres angles.

Dans le cas où $2a$ aura un diviseur commun avec L, la bille arrivera au point N de départ, et elle parcourra toujours le même chemin que la première fois, et dans le même sens, quoiqu'il y ait des parties de ce chemin qui soient parcourues suivant un mouvement rétrograde. La différence entre les deux cas est que dans le 1er (celui où il n'y a pas de diviseur commun), les mêmes parties sont parcourues alternativement dans les deux sens à l'infini; et dans le 2e cas, les parties parcourues suivant un mouvement direct, le sont toujours dans ce sens, et les autres le sont toujours en sens rétrograde.

Dans la fig. 2e, $AB=CB=15$, $AA_1=3$, $AN=1$; on a donc

$$\frac{1+6m}{15}=\frac{u}{L},\quad \frac{6m}{15}=\frac{2m}{5}.$$

donc la bille ne tombera pas dans un angle. De plus $\frac{2m}{5}$ ne peut donner que 4 restes différens; donc, en faisant $m=5$, on aura le même reste que pour $m=o$. Ce qui fait voir que la bille reviendra en N à son 5e point de contact avec AB.

De plus $\frac{1+6m}{15}=\frac{31}{15}=2+\frac{1}{15}$, ainsi, pour avoir l'ordre général de ce point, on ajoutera 2 à 4×5 et l'on aura 22.

La bille ne peut donc avoir que 22 points différens de ré-

flexion. Son mouvement sera direct en P_1^1 P_2^2.....jusqu'à P_1^{12}, rétrograde de P_4^{13} jusqu'à P_3^{21}. Le minimum de la distance de la bille à l'angle du billard $= 1$, et au centre de la blouse du milieu $= 1/2$.

Fig. 3. $AB = 195$, $BC = 141$, $AA_1 = 40$, $AN = 90$, $AG = 24$.

on aura pour la bande AB

$$\frac{u}{L} = \frac{90 + 80m}{195} = \frac{18 + 16m}{39}$$

et pour la bande CD

$$\frac{u'}{L} = \frac{90 + 40 + 80m}{195} = \frac{26 + 16m}{39}$$

16 et 39 n'ayant pas de commun diviseur, la bille ne peut revenir au point de départ par un mouvement direct, elle ne le peut que par un mouvement rétrograde, qui ne peut avoir lieu qu'autant que la bille ait été réfléchie sur elle-même, dans un angle, s'il n'y avait pas de blouse. Elle se perdra donc, si la blouse existe, et le mouvement sera arrêté.

La bille ne pourra tomber dans l'une des blouses du milieu : car u et u' divisés par $\frac{L}{2}$, ou $2u$ et $2u'$ divisés par L, donneront constamment des quotiens pairs.

$\frac{u'}{L}$ est divisible exactement en faisant $m = 13$, le quotient est $= 6$. La bille est donc alors dans la blouse C, et comme $m = 1$ correspond au 2ᵉ contact sur cette bande, il s'ensuit que la perte a lieu au 14ᵉ.

Ce 14ᵉ contact correspond au 60ᵉ de l'ordre général, vu que, sauf la correction, P_2^1 correspond au 2ᵉ, P_2^2 au 6ᵉ, P_2^3 au 10ᵉ et P_2^{14} au $4 \times 13 + 2 = 54$ᵉ. La correction est $+ 6$, donc on obtient le 60ᵉ.

S'il n'y avait pas de blouse, la bille rétrograderait par le même chemin, et reviendrait au point de départ, où elle subirait sa 120e ou $(2 \times 60)^{ème}$ réflexion, laquelle correspondra à la 27e sur AB. (Les réflexions angulaires réunissant deux points de contact, comptent double.)

$\frac{u}{L}$ est aussi divisible exactement lorsque $m = 33$: le quotient $= 14$. A P_4^{33} ou au $(4 \times 33 + 14)^e = 146$ contact de l'ordre général, la bille sera dans l'angle A, d'où elle reviendra de nouveau au point de départ, où elle se réfléchira pour la 39e fois sur AB, et pour la 172e fois en comptant toutes les bandes.

Ainsi la bille oscillera pour ainsi dire à l'infini entre les points A et C, la longueur du chemin parcouru pour une oscillation complète = 39 fois la longueur des deux diagonales de A_1BCD_1.

Si l'on voulait avoir égard à la dimension de la bille, il faudrait aussi connaître la vitesse : car pour que la bille tombe réellement dans la blouse, il faut que, pendant le temps qu'elle n'est pas soutenue, elle puisse tomber au moins d'une hauteur égale à son rayon. On voit donc que si la vitesse est considérable, elle ne se perdra pas, même lorsqu'elle est dirigée directement dans la blouse, si la surface réfléchissante s'étend au-delà de celle-ci.

Les modifications qui résultent dans la rotation, du chef des cas différens de celui de la figure, n'offrent pas de difficulté.

L'inspection seule de la figure suffit pour la démonstration. Il est évident que les lignes parcourues sont parallèles aux diagonales A_1C, BD_1, que le triangle $P_1^1 CP_2^1 = NA_1S$, et par suite $CP_2^1 = AN + AA_1$;

qu'en prenant P_2^1 pour point de départ, il doit résulter de même

$$AP_4^1 = CP_2^1 + AA_1 = AN + 2AA_1$$

ensuite

$$CP_2^2 = AP_4^1 + AA_1 = AN + 3AA_1 \text{ etc.}$$

nfin, quand la bille ne peut arriver à AB qu'après avoir été léchie par BC ou par AD, le point d'arrivée est encore à la me distance de la ligne réfléchissante, et la longueur du hemin parcouru est aussi restée la même que si la bille s'était e en ligne directe.

On voit que la solution géométrique d'un problème, qui au mier abord semble présenter quelque difficulté, se borne à ser un fil en parties égales et à le rouler autour du billard, e la solution arithmétique se réduit à une simple division en nbres entiers; le quotient et le reste répondent aux demandes e l'on peut faire.

On peut aussi résoudre le problème inverse, et déterminer pulsion et le lieu primitif de la bille, pour qu'elle arrive à point et suivant telle direction donnée, après avoir touché bandes un certain nombre de fois.

ANALISE.

tion du second problème énoncé à la page 219 du tom. III de la *Correspondance Mathématique et Physique*; par J. N. Noël, principal de l'Athénée de Luxembourg.

On suppose qu'un particulier achète tous les ans un nombre pigeons femelles, égal au rang de cette année; on suppose e chaque pigeon femelle, acheté une année, produise chaque née suivante, un nombre de pigeons femelles égal au rang de tte année suivante, à partir de celle de l'achat, et, qu'en outre, aque pigeon femelle, né une année, fournisse, chaque année i suit, un pigeon mâle. On demande, d'après cela, combien particulier aura de pigeons en tout au bout de n *années?*

Il est clair d'abord que le particulier, pendant les n années, a acheté un nombre de pigeons femelles représenté par

$$1+2+3+4+\ldots+n, \text{ ou par } \frac{1}{2}n(n+1).$$

Ensuite, le particulier a acheté, la vme année, v pigeons femelles, qui ont produit chacun 1 pigeon femelle la 1re année suivante, 2 la 2e, 3 la 3e, 4 la 4e,..., $n-v$ la $(n-v)^{me}$, et en tout

$$v[1+2+3+4+\ldots+(n-v)],\ \text{ou}\ \frac{1}{2}v(n-v)(n-v+1),$$

ou encore

$$\frac{1}{2}[(n+1)nv-(2n+1)v^2+v^3]\ldots.\ (1)$$

Cela fait voir que les v pigeons femelles achetés la vme année, ont produit, pendant les 1, 2, 3, 4,..., $(n-v-1)$ premières années qui suivent la vme, des nombres de pigeons femelles représentés respectivement par

$$v,\ 3v,\ 6v,\ 10v,\ldots,\ \frac{1}{2}v(n-v-1)(n-v).$$

Et puisque chaque pigeon femelle né une année, fournit un pigeon mâle chaque année qui suit, les pigeons femelles nés pendant les 1, 2, 3, 4...., $(n-v-1)$ premières années après la vme, produisent pendant la 2e, la 3e, la 4e, la 5e,..., la $(n-v)^{me}$ année qui suit cette vme, v, $3v$, $6v$, $10v$,..., $\frac{1}{2}v(n-v-1)(n-v)$ pigeons mâles, et en tout

$$v\left[1+3+6+10+\ldots+\frac{1}{2}(n-v-1)(n-v)\right],$$

ou bien

$$\frac{1}{6}v(n-v-1)(n-v)(n-v+1),\ (*)$$

(*) Pour la sommation des nombres triangulaires, voyez la pag. 88 des *Mélanges d'algèbres*; voyez aussi le n° 413 du *Traité élémentaire d'algèbre*, 2e édition.

encore

$$\frac{1}{6}[n(n^2-1)v-(3n^2-1)v^2+3nv^3-v^4]\ldots (2)$$

Prenant successivement $v=1, 2, 3, 4, \ldots, n$ et ajoutant, l'expression (1) donnera le nombre x total de pigeons femelles nés pendant les n années, et l'expression (2) fournira pareillement le nombre y de tous les pigeons mâles produits pendant les mêmes n années. Si donc on désigne par S_1, la somme des n premiers nombres entiers, par S_2, S_3, S_4, celles de leurs carrés, de leurs cubes et de leurs puissances quatrièmes, on aura

$$x=\frac{1}{2}[n(n+1)S_1-(2n+1)S_2+S_3],$$

$$y=\frac{1}{6}[n(n+1)(n-1)S_1-(3n^2-1)S_2+3nS_3-S_4].$$

Or, nous avons trouvé, dans le tom. I de la *Correspondance mathématique et Physique*, ainsi qu'à la page 87 des *Mélanges d'algèbre*, que $S_1=\frac{1}{2}n(n+1)$, $S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $S_3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ et $S_4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)[3n(n+1)-1]$. Substituant donc ces valeurs dans celles de x et de y, opérant toutes les réductions convenables, on trouvera, pour les nombres respectifs x et y de pigeons femelles et de pigeons mâles nés pendant les n années,

$$x=\frac{1}{24}n(n+1)[n(n+1)-2],$$

$$y=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n-1)(n-2).$$

Ajoutant ces deux nombres avec celui des pigeons femelles

achetés pendant les n années, et réduisant, on verra qu'au de n années, le particulier possèdera un nombre de pi exprimé par la formule

$$\frac{n(n+1)}{120}\left\{n\left[n(n+4)+1\right]+54\right\}.$$

Ainsi, au bout des années 1re, 2e, 3e, 4e, etc., le partic possédait 1, 4, 12, 31, etc., pigeons; ce qu'on peut aisén vérifier d'ailleurs.

Le problème ne serait pas plus difficile, si l'on supposait chaque pigeon femelle, né une année, produisît, chaque a qui suit, a pigeons mâles.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Etant données trois droites A, B, C, sur un plan, l'on mande le lieu des pôles *des divers cercles tangens à B, a leurs centres sur A, et C pour* POLAIRE COMMUNE; que proposée à la page 315 du IIIe vol., et résolue par M. Oli ancien élève de l'École Polytechnique.

Je désigne par α l'angle que font entre elles B et A, et l'angle que font entre elles C et A.

Par un point p, pris arbitrairement sur A, je mène pm, pendiculaire à B, et pq perpendiculaire à C. (*fig.* 4, *pl.*

Du point p, comme centre et avec un rayon $=pm$, je cris le cercle γ, qui sera un des cercles ayant leurs centre A et B pour tangente commune.

Du point q, je mène la droite qn tangente au cercle γ, e point n, j'abaisse la perpendiculaire nr sur pq.

Le point r sera le *pôle* du cercle γ, par rapport à la *polaire* C.

Le point O, intersection de A et C, sera pris pour origine des coordonnées, et les deux droites A et OQ, perpendiculaire à C, pour axes des coordonnées obliques; A étant l'axe des x et OQ celui des y.

Dans le triangle rectangle pnq, l'on a :

$$pr \times pq = \overline{pn}^2.$$

Dans le triangle rectangle pqO, l'on a :

$$pq = p\text{O}.\ \sin.\ \beta,$$

ensuite $$pn = pm = p\text{O}'.\ \sin.\ \alpha = (p\text{O} + \text{OO}')\ \sin.\ \alpha.$$

$$\text{OO}' = \text{une quantité constante } b.$$

Les coordonnées du point r seront $pr = y$ et $p\text{O} = x$.

Nous obtiendrons dès-lors l'équation :

$$xy = (x + b)^2.\ \frac{\sin.^2 \alpha}{\sin.\ \beta}.$$

qui appartient à une section conique, rapportée à des axes obliques.

Sans discuter cette équation, il est facile de reconnaître, qu'elle est celle d'une hyperbole ayant pour asymptote la droite OQ.

Et en effet, si du point O, comme centre, l'on décrit un cercle γ' tangent à B, la droite C sera un diamètre de ce cercle et aura par conséquent son *pôle* situé à l'infini sur la droite OQ.

Si la droite B est parallèle à C, alors l'angle $\alpha =$ l'angle β, et l'équation devient $xy = (x + b)^2 \sin.\ \alpha$.

Si la droite B passe par le point O, c'est-à-dire, si les trois droites A, B, C, se coupent au même point O; dès-lors $b = o$,

et l'équation devient $y = x \frac{\sin.^2 \alpha}{\sin. \, \mathcal{C}}$. qui appartient à une ligne droite passant par le point O.

Si l'on prend le point O′ pour origine des coordonnées au lieu du point O, et que l'on suppose que C soit parallèle à A, alors pq est une quantité constante $= a$,

et l'on a : $$pr = \frac{\overline{pn}^2}{pq}, \text{ et } pn = pm = po' \sin. \alpha.$$

D'où $y = \frac{x'^2 \sin.^2 \alpha}{a}$; équation d'une parabole rapportée à des axes rectangulaires.

Si la droite B est parallèle à A, alors l'angle α est nul, et l'on a :

$$pr = \frac{\overline{pn}^2}{pq}, \; pn = \text{une quantité constante } r, \text{ et } pq = pO. \sin. \mathcal{C};$$

par conséquent, l'équation devient $xy = \frac{r^2}{\sin. \mathcal{C}}$, et appartient à une hyperbole rapportée à ses asymptotes OA et OQ.

Si les trois droites A, B, C, sont parallèles entre elles, alors $pr =$ une quantité constante, et le lieu des pôles est une droite parallèle aux trois droites données.

Si la droite B est perpendiculaire à A, supposant l'origine des coordonnées en O,

$$\text{alors} \quad pr = \frac{pn^2}{pq}, \; pn = pO' = pO + OO', \text{ et } pq = pO. \sin. \mathcal{C};$$

l'équation devient dans ce cas $xy = \frac{(x+b)^2}{\sin. \mathcal{C}}$.

Si en même-temps C devient parallèle à A, l'angle $\mathcal{C} = o$, pq est constant $= a$, et l'équation devient $y = \frac{(x+b)^2}{a}$,

équation d'une parabole rapportée à des axes rectangulaires, et dont le sommet est au point O′.

Étant données deux surfaces développables D′ et D″, je

suppose que le centre d'une sphère S, variable de position et de rayon suivant une loi donnée, se meut sur une génératrice g' de la surface D'.

Les *pôles* de la surface S, dans une de ses positions, par rapport aux divers plans tangens de la surface D'', formeront une courbe γ.

Les *pôles* de la surface S, dans une position infiniment voisine de la précédente, par rapport aux divers plans tangens de D'', formeront une courbe γ'.

Et la série des courbes γ, γ', etc., formera une surface G.

Si je suppose que le centre de la sphère S, se meut sur une génératrice g'' de D', infiniment voisine de g'; S étant variable de position et de rayon suivant la même loi que précédemment :

Les *pôles* de S, dans ses diverses positions, par rapport aux plans tangens de D'', formeront une surface G';

Et les surfaces G, G', etc., seront les enveloppées d'une surface enveloppe E.

La surface E, contiendra les *pôles* de la sphère S, dans les diverses positions de son centre sur D', par rapport à la surface D''.

De ce qui précède, l'on peut déduire les théorèmes suivans :

1° Ayant deux cônes droits C et C', normaux entre eux, c'est-à-dire, tels que la génératrice de l'un soit normale à l'autre; toutes les sphères de rayon constant R, ayant leurs centres sur C, auront leurs *pôles* par rapport à la surface C', sur un hyperboloïde à une nappe et de rotation, et ayant le cône C pour surface asymptotique;

2° Toutes les sphères ayant leurs centres sur un plan P, et tangentes à une surface conique droite, dont le sommet est sur le plan P et dont l'axe A est perpendiculaire à ce plan, auront leurs *pôles* par rapport à un plan R parallèle à P, sur un paraboloïde elliptique, ayant pour axe de révolution la droite A;

3° Toutes les sphères ayant leurs centres sur un plan P et passant par un point r, situé sur le plan P, auront leurs *pôles* par rapport à un plan R parallèle à P, sur un para-

boloïde elliptique, ayant pour axe de révolution une droite perpendiculaire à P, au point r;

4° Si l'on a trois cônes droits C, C', C'', ayant même sommet a et même axe A, toutes les sphères tangentes à C' et ayant leurs centres sur C, auront leurs *pôles* par rapport à la surface C'' sur un quatrième cône droit, ayant son sommet en a et pour axe la droite A.

L'un quelconque des cônes C, C', C'', peut être une surface plane, et la surface, lieu des *pôles*, sera toujours un cône droit;

5° Si l'on a deux cônes droits C', C'', ayant même sommet a et même axe A, toutes les sphères tangentes à C' et dont les *pôles*, par rapport à la surface conique C'', seront sur un plan passant par le point a et perpendiculaire à la droite A, auront leurs centres sur un troisième cône droit, ayant son sommet en a et pour axe la droite A.

Note sur le même Problème.

Disposons les axes des coordonnées rectangulaires de manière que la polaire commune soit l'axe des y; et supposons, pour plus de généralité, indéterminées la ligne qui parcourt le centre du cercle mobile et la ligne à laquelle ce cercle est constamment tangent. Cela posé, nous aurons, par la propriété connue des pôles (*fig*. 5.),

$$PO.pO = PO\,(PO - x) = r^2;\ \ldots\ldots (1)$$

r étant le rayon du cercle, et p est le pôle de la droite Ay. Nous remarquerons, avant de faire des applications de l'équation précédente, que PO est l'abscisse du centre du cercle, et que l'ordonnée de ce même centre est égal à l'ordonnée du pôle p. Supposons maintenant que r est constant, et que le centre du cercle parcourt une droite qui passe par l'origine, et dont l'équation est

$$y = ax',$$

la valeur de x', portée dans l'équation (1), au lieu de PO donnera le lieu des pôles demandés

$$y\,(y - ax) = a^2r,$$

c'est l'équation d'une *hyperbole*.

Si ce cercle, au lieu d'avoir un rayon constant, était assujetti à être tangent à une droite St, faisant avec AS l'angle β, on aurait

$$\begin{array}{cccc} Ot : OS :: \sin.\beta : 1 \\ OS : O'S' :: 1 : \sin.\alpha \\ \hline Ot : O'S' :: \sin.\beta : \sin.\alpha \end{array}$$

d'où

Ainsi, en observant que $O'S' = AS' - AO' = a - x$,

$$r = Ot = \frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha}(a - x)$$

et par conséquent, pour le lieu des pôles, on a

$$y(y - ax) = a^2 (a - x)^2 \frac{\sin.^2 \beta}{\sin.^2 \alpha}.$$

Ce qui est encore l'équation d'une *hyperbole.* Il est facile de voir que les solutions précédentes ont également lieu pour l'espace, en supposant un plan polaire au lieu d'une droite, une sphère au lieu d'un cercle et un cône dans lequel se meut cette sphère, au lieu d'un angle.

Si le centre d'un cercle de rayon constant parcourait une hyperbole équilatère, ayant pour équation $yx = m$, le lieu des pôles serait une autre hyperbole, ayant pour équation

$$\frac{m}{y}\left(\frac{m}{y} - x\right) = r^2 \text{ ou bien } m\left(m - yx\right) = r^2 y.$$

A. Q.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

Des relations polaires qui existent entre les huit courbes tangentes à trois sections planes d'une surface du second ordre; par M. Olivier, ancien élève de l'école Polytechnique (*Voy.* pag. 9 de ce vol.).

Je désigne par α et α' les deux courbes tangentes à C′, C″, C‴, et dont les plans passent par la droite E; par β et β' les deux courbes tangentes à C′, C″, C‴, et dont les plans passent par la droite I′; par γ et γ' les deux courbes tangentes à C′, C″, C‴, et dont les plans passent par la droite I″, et par δ et δ' les deux courbes tangentes à C′, C″, C‴, et dont les plans passent par la droite I‴;

Par a' le point de contact de α et C′; par a'' le point de contact de α et C″; par a''' le point de contact de α et C‴;

Par A′ le point de contact de α' et C′; par A″ le point de contact de α' et C″; par A‴ le point de contact α' et C‴;

Par b' le point de contact de β et C′; par b'' le point de contact de β et C″; par b''' le point de contact de β et C‴;

Par B′ le point de contact de β' et C′; par B″ le point de contact de β' et C″; par B‴ le point de contact de β' et C‴;

Par g' le point de contact de γ et C′; par g'' le point de contact de γ et C″; par g''' le point de contact de γ et C‴;

Par G′ le point de contact de γ' et C′; par G″ le point de contact de γ' et C″; par G‴ le point de contact de γ' et C‴;

Par d' le point de contact de δ et C' ; par d'' le point de contact de δ et C''; par d''' le point de contact de δ et C''';

Par D' le point de contact de δ' et C' ; par D'' le point de contact de δ' et C''; par D''' le point de contact de δ' et C'''.

Je suppose trois cônes S', S'', S''', ayant respectivement pour bases les courbes C', C'', C''', leurs sommets étant dans un plan passant par l'une des quatre droites E, I, I', I'', et tellement disposés entr'eux que les cônes S', S'', S''', se coupent deux à deux suivant deux courbes planes.

Je désigne les deux courbes-intersections de S' et S'' par $\alpha'_{,,}$ et $\beta'_{,,}$; de S' et S''' par $\alpha'_{,,,}$ et $\beta'_{,,,}$, et de S'' et S''' par $\alpha''_{,,,}$ et $\beta''_{,,,}$;

J'ai démontré, dans le n° 3 du tom. III de la *Correspondance* déjà citée, que le plan de l'une des courbes planes $\alpha'_{,,}$, $\beta'_{,,}$ passait par la droite $L'_{,,}$ intersection des plans P', P'', contenant les bases C', C'', des cônes S', S''.

Ainsi je puis supposer que le plan de $\alpha'_{,,}$ passe par la droite $L'_{,,}$; que le plan de $\alpha''_{,,,}$ passe par la droite $L''_{,,,}$, et que le plan de $\alpha'_{,,,}$ passe par la droite $L'_{,,,}$.

Le plan de la courbe $\beta'_{,,}$ coupera le plan P' suivant une droite que je désigne par $P'\beta'_{,,}$; le plan P'' suivant une droite que je désigne par $P''\beta'_{,,}$; et le plan P''' suivant une droite que je désigne par $P'''\beta'_{,,}$;

Le plan de la courbe $\beta'_{,,,}$ coupera le plan P' suivant une droite que je désigne par $P'\beta'_{,,,}$; le plan P'' suivant une droite que je désigne par $P''\beta'_{,,,}$; et le plan P''' suivant une droite que je désigne par $P'''\beta'_{,,,}$;

Le plan de la courbe $\beta''_{,,,}$ coupera le plan P' suivant une droite que je désigne par $P'\beta''_{,,,}$; le plan P'' suivant une droite que je désigne par $P''\beta''_{,,,}$, et le plan P''' suivant une droite que je désigne par $P'''\beta''_{,,,}$;

Les plans des deux courbes $\alpha'_{,,}$ et $\beta'_{,,}$ se couperont suivant une droite que je désigne par $M'_{,,}$; les plans des deux courbes $\alpha''_{,,,}$ et $\beta''_{,,,}$ se couperont suivant une droite que je désigne par $M''_{,,,}$, et les plans des deux courbes $\alpha'_{,,,}$ et $\beta'_{,,,}$ se couperont suivant une droite que je désigne par $M'_{,,,}$;

Les trois droites $M'_{,,}$, $P'\beta'_{,,}$, $P''\beta'_{,,}$, se couperont en un point

$m'_{,,}$ situé sur $L'_{,,}$; les trois droites $M'_{,,,}$, $P'\beta'_{,,,}$ $P'''\beta'_{,,,}$, se couperont en un point $m'_{,,,}$ situé sur $L'_{,,,}$, et les trois droites $M''_{,,,}$, $P''\beta''_{,,,}$, $P'''\beta''_{,,,}$, se couperont en un point $m''_{,,,}$ situé sur $L''_{,,,}$.

Les trois points $m'_{,,}$, $m'_{,,,}$, $m''_{,,,}$, varient de position sur les trois droites $L'_{,,}$, $L'_{,,,}$, $L''_{,,,}$, en même temps que l'on fait varier de position le plan qui contient les sommets des trois cônes S', S'', S'''.

Les trois cônes S', S'', S''', se couperont en huit points; car l'intersection des deux cônes S', S'', étant formée des deux courbes planes $\alpha'_{,,}$ et $\beta'_{,,}$, ces deux courbes seront coupées chacune en deux points, par chacune des deux courbes $\alpha'_{,,,}$, et $\beta'_{,,,}$ intersection des deux cônes S', S'''.

Les huit points communs aux trois cônes S', S'', S''', seront distribués de la manière suivante :

Les trois courbes $\alpha'_{,,}$, $\alpha'_{,,,}$, $\alpha''_{,,,}$, auront deux points communs, en d'autres termes, leurs trois plans se couperont suivant une droite H, passant par le point p, puisque ces plans passent respectivement par les trois droites $L'_{,,}$, $L'_{,,,}$, $L''_{,,,}$.

Les trois courbes $\alpha'_{,,}$, $\alpha'_{,,,}$, $\alpha''_{,,,}$, se combineront avec les trois courbes $\beta'_{,,}$, $\beta'_{,,,}$, $\beta''_{,,,}$ et formeront trois groupes :

Premier groupe, $\beta'_{,,}$, $\beta'_{,,,}$, $\alpha''_{,,,}$.

Deuxième groupe, $\beta'_{,,}$, $\beta''_{,,,}$, $\alpha'_{,,,}$.

Troisième groupe, $\beta''_{,,,}$, $\beta'_{,,,}$, $\alpha'_{,,}$.

Chacun de ces groupes aura deux points communs, en d'autres termes, les plans des trois courbes de chaque groupe se couperont suivant une même droite.

Je désigne par H' la droite appartenante au premier groupe; par H'' la droite appartenante au deuxième groupe, et par H''' la droite appartenante au troisième groupe;

Par a_1', a_1'', les deux points situés sur la droite H; par b_1', b_1'', les deux points situés sur la droite H'; par b_2', b_2'', les deux points situés sur la droite H'', et par b_3', b_3'', les deux points situés sur la droite H'''.

Je dis que : si par chacun de ces huit points et les trois sommets des cônes S′, S″, S‴, l'on fait passer des droites, l'on aura :

Huit génératrices du cône S′ donnant huit points sur la courbe C′; huit génératrices du cône S″ donnant huit points sur la courbe C″, et huit génératrices du cône S‴ donnant huit points sur la courbe C‴.

Que, chacun des huit points situés sur C′, C″, C‴, sera celui de contact de l'une des huit courbes tangentes à la fois à C′, C″, C‴; et que chacune des huit courbes tangentes, sera la base d'un cône, ayant pour sommet l'un des huit points communs aux trois cônes, S′, S″, S‴, et tangent à la fois à ces trois cônes.

Je donnerai à la fin de ce mémoire, la démonstration des divers résultats que je viens d'énoncer.

Le plan de la courbe *α* coupera P′ suivant une droite *ta′*; P″ suivant une droite *ta″*, et P‴ suivant une droite *ta‴*;

Le plan de la courbe *α′* coupera P′ suivant une droite *t*A′; P″ suivant une droite *t*A″, et P‴ suivant une droite *t*A‴.

Les deux plans contenant *α* et *α′* se coupent suivant la droite E, par conséquent *ta′* et *t*A′ se couperont sur E en un point *t′*E; *ta″* et *t*A″ en un point *t″*E, *ta‴* et *t*A‴ en un point *t‴*E;

La droite *a′*A′ sera *polaire* de C′ par rapport au *pôle* *t′*E; la droite *a″*A″ sera *polaire* de C″ par rapport au *pôle* *t″*E, et *a‴*A‴ sera *polaire* de C‴ par rapport au *pôle* *t‴*E;

La droite *m′n′* est *polaire* de la courbe C′ par rapport au *pôle* *p*; la droite *m″n″* est *polaire* de la courbe C″ par rapport au *pôle* *p*, et *m‴n‴* est *polaire* de la courbe C‴, par rapport au *pôle* *p*.

Il est évident que la droite *m′n′* passe par le point *t′*E; la droite *m″n″* passe par le point *t″*E, et la droite *m‴n‴* passe par le point *t‴*E.

Mais, en vertu des propriétés des quadrilatères inscrits et circonscrits, si, par un point *t′*E, l'on mène deux tangentes *ta′* et *t*A′ à une section conique C′, et si, par un second point *p*, l'on mène deux secondes tangentes *pm′* et *pn′*, telles que les

trois points t'E, m', n', sont en ligne droite, l'on sait que les trois points a', A', p, seront aussi en ligne droite. Par conséquent, les deux droites $m'n'$ et $a'A'$ seront dites: *polaires conjuguées* ou *réciproques* de la courbe C', parce que l'une contient le *pôle* de l'autre.

Ainsi l'on peut conclure de ce qui précède, que les deux courbes α et α' seront enveloppées par un cône ayant pour sommet le point p.

Mais puisque le point p est *pôle* de Σ par rapport au *plan polaire* P, il s'en suit que le sommet r, du second cône enveloppant α et α' sera situé sur P:

Et comme les plans des deux courbes α et α' se coupent suivant la droite E, le sommet ε sera le *pole* de Σ par rapport au *plan polaire* R, passant par le point p et la droite E, et sera l'intersection de la *polaire réciproque* de la droite E et du plan P.

Ainsi, si par la droite E, je mène deux plans tangens à la surface Σ, les deux points de contact seront sur une droite passant par le point p et qui percera le plan P en un point r, sommet du second cône enveloppant les deux courbes α et α'.

Si je considère les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dont les plans passent par la droite I', j'aurai les résultats suivans:

Le plan de $\mathcal{C}$ coupera le plan P' suivant une droite tb', le plan P'' suivant une droite tb'', le plan P''' suivant une droite tb''', le plan $\mathcal{C}'$ coupera le plan P' suivant une droite tB', le plan P'' suivant une droite tB'', et le plan P''' suivant une droite tB'''.

Les droites tb' et tB' se couperont sur I' en un point t'I'; les droites tb'' et tB'' se couperont sur I' en un point t''I', et les droites tb''' et tB''' se couperont sur I' en un point t'''I';

La droite b'B' sera *polaire* de C' par rapport au *pôle* t'I'; la droite b''B'' sera *polaire* de C'' par rapport au *pôle* t''I', et la droite b'''B''' sera *polaire* de C''' par le rapport au *pôle* t'''I';

La droite $m'n'$ passera par le point t'I'; la droite $m''n''$ passera par le point t''I', et la droite $m'''n'''$ passera par le point t''' I'.

Avec un peu de réflexion, l'on verra que tout ce que j'ai dit, par rapport aux courbes α et α', pourra se répéter mot pour mot, par rapport aux courbes β et β'.

Ainsi les droites $b'B'$, $b''B''$, $b'''B'''$, passeront par le point p:

Les deux courbes β et β' seront enveloppées par deux cônes, dont l'un aura pour sommet le point p; et l'autre aura pour sommet, le point d'intersection du plan P et de la *polaire réciproque* de la droite I'.

Cette *polaire réciproque*, sera la droite intersection des deux plans tangens à la surface Σ, ayant pour points de contact, ceux où la droite I' coupe la courbe C.

L'on obtiendrait des résultats analogues en opérant sur les deux courbes γ et γ' ou δ et δ'.

Ainsi, désignant par R la *polaire réciproque* de la droite E; par R' la *polaire réciproque* de la droite I'; par R'' la *polaire réciproque* de la droite I'', et par R''' la *polaire réciproque* de la droite I''',

je pourrai énoncer le théorème suivant :

Les huit courbes tangentes à trois sections planes C', C'', C''', *d'une surface du second ordre, peuvent être enveloppées deux à deux par huit cônes, dont quatre ont, pour sommet commun, le point* p, *intersection des plans des trois sections planes; et les quatre autres sommets sont les intersections du* PLAN POLAIRE P *de la surface* Σ, *ayant le point* p *pour* PÔLE, *et des quatre* POLAIRES RÉCIPROQUES R, R', R'', R''', *des quatre droites* E, I', I'', I''', *qui unissent trois à trois, les sommets des six cônes enveloppant deux à deux les trois sections planes.*

Je désigne par r le point de rencontre de la droite R et du plan P; par r' le point de rencontre de la droite R' et du plan P; par r'' le point de rencontre de la droite R'' et du plan P, et par r''' le point de rencontre de la droite R''' et du plan P.

Je désigne par α^2 la courbe de section du plan P et du cône qui, enveloppant α et α', a pour sommet le point p; par β^2 la courbe de section du plan P et du cône qui, enveloppant β et β', a pour sommet le point p; par γ^2 la courbe de section du plan P et du cône qui, enveloppant γ et γ', a pour sommet le point p, et par δ^2

la courbe de section du plan P et du cône qui, enveloppant δ et δ', a pour sommet le point p.

Il est évident que tout plan passant par p et tangent à la courbe α^2, coupera la surface Σ suivant une courbe μ qui pourra être enveloppée avec C′ ou C″ ou C‴ par un cône dont le sommet sera sur la droite E; puisque cette courbe μ sera tangente en même temps aux deux courbes α et α'.

Il est évident qu'il en sera de même pour la courbe γ', donnée par la section de la surface Σ par un plan arbitraire passant par le point p et tangent à la courbe 6^2, c'est-à-dire, que cette courbe γ' pourra être enveloppée avec C′ ou C″, ou C‴, par un cône dont le sommet sera situé sur la droite I′.

Ainsi je puis énoncer le théorème suivant :

Tout cône qui, ayant pour base l'une des trois courbes C′, C″, C‴, et pour sommet un point situé sur la droite E, ou la droite I′, ou la droite I″, ou la droite I‴, coupera la surface Σ suivant une courbe plane dont le plan passera par le point p, *et sera tangent ou à la courbe α^2, ou à la courbe 6^2, ou à la courbe γ^2, ou à la courbe δ^2.*

Mais la propriété que je viens de trouver pour les cônes qui, enveloppant α et α', 6 et $6'$, γ, et γ', δ et δ', ont pour sommet commun le point p, ne subsiste pas pour le cône qui, enveloppant α et α', a pour sommet le point r; pour le cône qui, enveloppant 6 $6'$ et a pour sommet le point r'; pour le cône qui, enveloppant γ et γ', a pour sommet le point r'', ni pour celui qui, enveloppant δ et δ', a pour sommet le point r'''.

Je suppose que les sommets des trois cônes S′, S″, S‴, sont sur un plan passant par la droite E : pour que ces trois cônes se coupent deux à deux suivant deux courbes planes, il faut que leurs sommets soient deux à deux sur trois droites passant par les trois sommets $\varepsilon'_{,,}$, $\varepsilon'_{,,,}$, $\varepsilon''_{,,,}$;

Ainsi, désignant par ρ' le sommet du cône S′; par ρ'' le sommet du cône S″, et par ρ''' le sommet du cône S‴; l'on aura les trois points ρ', ρ'', $\varepsilon'_{,,}$ en ligne droite, que je désigne par $S'_{,,}$; les trois points ρ', ρ''', $\varepsilon'_{,,,}$ en ligne droite, que je désigne par $S'_{,,,}$, et les trois points ρ'', ρ''', $\varepsilon''_{,,,}$ en ligne droite, que je désigne par $S''_{,,,}$.

Les deux points a' et a'', contacts de α avec C′ et C″, seront en ligne droite avec $\varepsilon_{,}$.

Par conséquent, le plan qui passera par la droite $a'a''$ et la droite $S'_{,,}$ coupera le cône S′ suivant une génératrice $a'\rho'$, et le cône S'' suivant une génératrice $a''\rho''$.

Les deux génératrices $a'\rho'$ et $a''\rho''$ se couperont en un point $a'_{,,}$.

Les deux points a' et a''' contacts de α avec C′ et C‴ seront en ligne droite avec $\varepsilon'_{,,,}$.

Par conséquent, le plan qui passera par la droite $a'\,a'''$ et la droite $S'_{,,,}$ coupera le cône S′ suivant une génératrice $a'\ \rho'$, le cône S‴ suivant une génératrice $a'''\ \rho'''$.

Les deux génératrices $a'\rho'$ et $a'''\rho'''$ se couperont en un point $a'_{,,,}$.

Les deux points a' et a''', contacts de α avec C′ et C‴, seront en ligne droite avec $\varepsilon''_{,,,}$.

Par conséquent, le plan qui passera par la droite $a''\ a'''$ et la droite $S''_{,,,}$ coupera le cône S″ suivant une génératrice $a''\ \rho''$ et le cône S''', suivant une génératrice $a'''\ \rho'''$.

Les deux génératrices $a''\rho''$ et $a'''\rho'''$ se couperont en un point $a'_{,,,}$.

Les deux points a'' et a''', contacts de α avec C″ et C‴, seront en ligne droite avec $\varepsilon''_{,,,}$.

Par conséquent, le plan qui passera par la droite $a''\ a'''$ et la droite $S''_{,,,}$ coupera le cône S″ suivant une génératrice $a''\ \rho''$, et le cône S''' suivant une génératrice $a'''\rho'''$.

Les deux génératrices $a''\ \rho''$ et $a'''\ \rho'''$ se couperont en un point $a''_{,,,}$.

Les trois points $a'_{,,}$, $a'_{,,,}$, $a''_{,,,}$ se confondent en un seul : en effet, si par la droite ta' tangente à C′ et α au point a', je fais passer un plan tangent au cône S′, ce plan coupera celui qui contient les trois sommets ρ', ρ'', ρ''' suivant une droite passant par les points t' E et ρ'. Je désigne ce plan par Ta', j'obtiendrai de même les deux autres plans analogues, Ta'' et Ta'''. Les deux plans Ta' et Ta'' se couperont suivant une droite passant par le point $a'_{,,}$ et par le point tL$'_{,,}$ où les deux droites ta' et ta'' se croisent sur L$'_{,,}$. Je désigne cette droite par $ta'_{,,,}$.

De même, les plans Ta'' et Ta''' se couperont suivant une

droite passant par les points $a''_{,,,}$ et $tL'_{,,,}$. Je désigne cette droite par $ta'_{,,,}$.

De même les plans Ta'' et Ta''' se couperont suivant une droite passant par les points $a''_{,,,}$ et $tL''_{,,,}$. Je désigne cette droite par $ta''_{,,,}$.

Les trois plans Ta', Ta'', Ta''' se couperont en un point par lequel devront passer les trois droites $ta'_{,,}$, $ta'_{,,,}$, $ta''_{,,,}$, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les trois points $a'_{,,}$, $a'_{,,,}$, $a''_{,,,}$ se confondent en un seul point, que je désigne par o. Donc, etc.

Je puis opérer pour la courbe α' comme je viens de le faire pour la courbe α, et j'obtiendrai le point o', un des huit points communs aux trois cônes $S'_{,}$ $S''_{,}$ $S'''_{,}$.

Les deux points o et o' sont sur une droite qui passe par le point p. Et en effet, les trois points a', A', p, les trois points a'', A'', p, et les trois points a''', A''', p sont en ligne droite.

Le plan qui passe par $a'A'$ et le sommet ρ' contient es deux points o et o'. Je désigne ce plan par O'.

Le plan qui passe par $a''A''$ et le sommet $\rho''_{,}$ contient les deux points o et o'. Je désigne ce plan par O''.

Le plan qui passe par $a'''A'''$ et le sommet ρ''' contient les deux points o et o'. Je désigne ce plan par O'''.

Les trois plans O', O'', O''', passent par le point p; ils se coupent donc suivant une droite oo', passant par p. (La droite qui passe par les deux points o et o' est celle que j'ai désignée précédemment par H.)

Je puis opérer par rapport aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, γ et γ', δ et δ', comme pour α et α', et j'obtiendrai des résultats analogues; ainsi, considérant les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dont les plans se çoupent suivant la droite I', l'on remarquera que les points de contact b' et b''' de la courbe $\mathcal{C}$ avec C' et C''', seront en ligne droite avec le point $\varepsilon'_{,,,}$; que les points de contact b' et b'' de $\mathcal{C}$ avec C' et C'' sont en ligne droite avec $I'_{,,}$, et que les points de contact b'' et b''' de $\mathcal{C}$ avec C'' et C''' sont en ligne droite avec $I''_{,,,}$.

Les deux droites tb' et tb'' tangentes à la fois, l'une à C' et $\mathcal{C}$

point b', l'autre à C'' et C' au point b'', se couperont sur $L'_{,,}$
un point que je désigne par $tL'_{,,}$.
De même les deux droites tb' et tb''' se couperont sur $L'_{,,,}$ en
point $tL'_{,,,}$; et les deux droites tb'' et tb''' se couperont sur
en un point $tL''_{,,,}$.
La génératrice $b'\rho'$ du cône $S'_{,}$ coupera la génératrice $b''\rho''$
cône S'' en un point que je désigne par $b'_{,,}$.
génératrice $b'\rho'$ du cône $S'_{,}$ coupera la génératrice $b'''\rho''$ du
S''' en un point que je désigne par $b'_{,,,}$.
La génératrice $b''\rho''$ du cône $S''_{,}$ coupera la génératrice $b'''\rho'''$
cône S''' en un point que je désigne par $C''_{,,,}$.
Je désigne par Tb' le plan passant par le point ρ' et la droite
; par Tb'', le plan passant par le point ρ'' et la droite tb'';
par Tb''', le plan passant par le point ρ''' et la droite
.

Les deux plans Tb' et Tb'' se couperont suivant une droite
, passant par le point $b'_{,,}$ et le point $tL'_{,,}$.
Les deux plans Tb' et Tb''' se couperont suivant une droite
, passant par le point $b'_{,,,}$ et le point $tL'_{,,,}$.
Les deux plans Tb'' et Tb''' se couperont suivant une droite
, passant par le point $b''_{,,,}$ et le point $tL''_{,,,}$.
Les trois plans Tb', Tb'', Tb''', se couperont en un point
lequel devront nécessairement passer les trois droites $tb'_{,,}$,
, $tb''_{,,,}$, par conséquent, les trois points $b'_{,,}$, $b'_{,,,}$, $b''_{,,,}$, se
confondent en un seul, que je nomme z.
En considérant la courbe C', j'obtiendrai un point z', qui
l'analogue du point z.
Les deux points z et z' seront sur une droite que j'ai désignée
précédemment par H'; mais les trois points b', B', p ainsi que
, B'', p et b''', B''', p, sont en ligne droite; par conséquent,
comme pour les courbes α et α', la droite H' passera par le point p.
Nous pouvons donc conclure de tout ce qui précède, que
huit points communs aux trois cônes $S'_{,}$ $S''_{,}$ $S'''_{,}$ sont deux à
deux sur quatre droites H, $H'_{,}$ $H''_{,}$ $H'''_{,}$ qui passent par le
point p; que les trois cônes S', S'', S''', se coupent en huit points
qui sont les sommets de huit cônes ayant respectivement pour

base, l'une des huit courbes tangentes à C′, C″, C‴, et qui seront tangents à la fois aux trois cônes S′, S″, S‴.

Si, au lieu de faire passer le plan des sommets des trois cônes S′, S″, S‴, par la droite E, on le faisait passer par l'une des trois droites I′, I″, I‴, l'on obtiendrait des résultats analogues aux précédens; donc, etc.

Je renvoie à un autre numéro de la *Correspondance* des Pays-Bas, l'examen des cas particuliers, et la recherche des propriétés polaires de trois sections coniques, situées sur un plan.

MÉCANIQUE.

Solution d'un problème sur la rotation des corps, par M. Desalis, officier d'artillerie et ancien élève de l'École Polytechnique.

L'explication, par les principes de la mécanique, de plusieurs expériences très-curieuses sur les mouvemens gyratoires que M. *Quetelet* a fait connaître dans un des numéros précédens de la *Correspondance*, et dont on trouvera une description détaillée dans la notice de M. *Nérenburger* (*), repose sur la solution de différens cas particuliers du problème suivant, que nous traiterons dans toute sa généralité :

Déterminer les diverses circonstances du mouvement d'un corps pesant de forme quelconque, suspendu par un fil à un point fixe, et tournant uniformément autour de la verticale, passant par ce point fixe.

La considération de la pesanteur et de la masse du fil, étant étrangère à l'esprit du problème, et ne pouvant d'ailleurs que donner de très-légères différences entre les résultats du calcul

---

(*) Voyez ci-après l'article *Physique*.

et ceux que M. *Nerenburger* a déduits d'expériences, dans lesquelles il n'a employé que des fils d'une très-grande ténuité, nous admettrons, comme on le fait en mécanique dans la question du pendule, que ce fil est sans pesanteur, sans masse et sans élasticité.

Observons d'abord que le centre de gravité du corps se trouvera toujours dans le plan vertical du fil, tandis que le fil lui-même décrira évidemment un cône droit : en effet, puisque le système est en équilibre, toutes les forces qui le sollicitent devront se composer en une seule, dirigée suivant la longueur du fil, et par conséquent, située tout entière dans son plan vertical ; mais la pesanteur est la seule des composantes qui soit verticale, et toutes les autres sont horizontales : donc elle sera dans le plan vertical du fil, donc aussi le centre de gravité du corps s'y trouvera.

Soient S le point fixe qui retient le fil, SZ′ l'axe vertical de rotation, SA une des positions du fil, A le point d'attache du corps et G son centre de gravité, (*fig.* 6, *pl.* III).

Supposons que l'on ait rapporté l'équation de la surface du corps, à trois axes rectangulaires X, Y, Z; l'axe des Z étant la droite AZ, qui passe par le centre de gravité et le point d'attache, et l'origine des coordonnées étant le point d'attache lui-même, de telle sorte que si AM est la trace du plan des XY sur le plan vertical du fil, l'angle MAX mesurera l'inclinaison de ce dernier plan sur celui des ZX.

Le problème sera complétement résolu lorsqu'on aura déterminé la position du corps, pour chacune des vitesses uniformes du système depuis zéro jusqu'à l'infini : or, cette position peut être déterminée par les données suivantes : 1° l'angle $ASZ' = \alpha$, inclinaison du fil; 2° l'angle $AIS = \beta$, inclinaison de l'axe des Z; 3° l'angle $MAX = \beta$, inclinaison du plan des ZX sur le plan vertical du fil. Soient aussi :

La longueur du fil $= l$;

La distance du point d'attache au centre de gravité $= AG = Z_1$

La vitesse angulaire de rotation $= \omega$;

La densité du corps, supposée invariable, $= \rho$;

La masse d'une de ses molécules $= dm = \rho dx dy dz$;
Son poids $= P = g\int dm$.

Imaginons en outre, pour la facilité des calculs, un système accessoire de coordonnées rectangulaires X′, Y′, Z′, dont l'axe des Z′ sera l'axe de rotation, et dont l'axe des Y′ passera par le point d'attache A.

Pour éviter la confusion des signes, nous conviendrons que dans chacun des deux systèmes, les trois coordonnées seront positives dans l'angle aux côtés duquel nous avons mis les lettres X, Y, Z, et X′, Y′, Z′.

Cela posé, on trouve par les principes de la mécanique, et en observant que tout se réduit à exprimer analitiquement que les forces du système ne puissent qu'exercer une tension suivant la longueur du fil, on trouve, dis-je, que les cinq équations d'équilibre se réduisent aux quatre suivantes:

$$\int x'dm = o$$
$$\omega^2\int y'dm - \text{P tang.}\, \alpha = o \ldots (a)$$
$$\int x'z'dm = o \ldots\ldots\ldots (b)$$
$$\omega^2\int y'z'dm - \text{P}z_1 \text{ sin.}\, \beta = o \ldots (c)$$

dans lesquelles $\int$ représente des intégrales triples définies, étendues au volume entier du corps.

Comme nous allons faire voir que la première de ces équations n'est qu'une identité, il ne nous restera que les trois équations nécessaires pour déterminer α, β et ε.

En effet, en passant d'un des deux systèmes rectangulaires à l'autre, nous aurons généralement :

$$x' = A_1x + B_1y + C_1z + D_1$$
$$y' = A_2x + B_2y + C_2z + D_2$$
$$z' = A_3x + B_3y + C_3z + D_3$$

et leur position réciproque dépendant ici des quantités α, β, ε

on trouvera que les différens coefficiens linéaires A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, etc., ont les valeurs siuvantes :

$$A_1 = \sin.\varepsilon,\quad B_1 = \cos.\varepsilon,\quad C_1 = o,\quad D_1 = o,$$

$$A_2 = -\cos.\varepsilon\cos.\beta,\ B_2 = \sin.\varepsilon\cos.\beta,\ C_2 = -\sin.\beta,\ D_2 = l\sin.\alpha,$$

$$A_3 = -\cos.\varepsilon\sin.\beta,\ B_3 = \sin.\varepsilon\sin.\beta,\ C_3 = \cos.\beta,\ D_3 = o;$$

Les substituant dans les valeurs de x', y', z', et mettant ensuite ces dernières dans les quatre équations d'équilibre, elles deviendront, en observant que $\int xdm = o$, $\int ydm = o$, puisque le centre de gravité G se trouve sur l'axe des Z :

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\omega^2}{g}[l\sin.\alpha - Z_1\sin.\beta] \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon\sin.\beta\left[\int y^2dm - \int x^2dm\right] + \sin.\beta[\sin.^2\varepsilon - \cos.^2\varepsilon]\int xydm$$
$$+ \sin.\varepsilon\cos.\beta\int xzdm + \cos.\varepsilon\cos\beta\int yzdm = o\ldots(2)$$

$$\sin.\beta\cos.\beta\left[\cos.^2\varepsilon\int x^2dm + \sin.^2\varepsilon\int y^2dm - \int z^2dm\right]$$
$$-2\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon\sin.\beta\cos.\beta\int xydm + \cos.\varepsilon[\sin.^2\beta - \cos^2\beta]\int xzdm$$
$$-\sin.\varepsilon[\sin.^2\beta - \cos.^2\beta]\int yzdm + l\sin.\alpha\cos.\beta\int zdm$$
$$-P\frac{Z_1\sin.\beta}{\omega^2} = o.\ \ldots\ldots\ldots (3)$$

Ces trois équations donnent la solution complète du problème. On voit à leur inspection qu'il en résultera pour une même vitesse angulaire, un assez grand nombre de systèmes de valeurs de α, β et ε, égal au degré des équations finales d'élimination, et, par conséquent, autant de positions d'équilibre différentes : mais sans chercher à s'en assurer par des opérations analitiques, on voit de suite, par la géométrie, qu'il ne peut jamais en exister plus de trois qui soient réelles et desquelles deux seulement seront stables : toutes les autres solutions données par les équations (1), (2), (3), sont imaginaires :

En effet, supposant d'abord que le corps, ayant été abandonné à lui-même, ait pris sa position d'équilibre stable, dans laquelle son centre de gravité est le plus bas possible; si ensuite on lui imprime ainsi qu'au fil, un mouvement de rotation uniforme qui augmente de plus en plus jusqu'à devenir infini, il arrivera, suivant les circonstances particulières de l'expérience, qu'il prendra une des deux séries de positions, pour lesquelles les axes des Z auront celles indiquées dans les figures 7 et 8.

Si, au contraire, on suppose *rationnellement* que le corps soit parti de sa position d'équilibre instable, où son centre de gravité est le plus haut possible, il prendra une troisième et dernière série de positions, indiquées dans la figure 9.

Pour savoir quelles seront les limites de chacune d'elles, c'est-à-dire, quelles seront les trois positions d'équilibre, lorsque la vitesse sera infiniment grande, nous reprendrons l'équation (1).

$$\text{tang. } \alpha = \frac{\omega^2}{g}\left[l \sin. \alpha - Z_1 \sin. \beta\right]$$

qui donnera toujours tang. $\alpha = \infty$ pour $\omega = 0$, tant que l'on aura $l \sin \alpha >< Z_1 \sin. \beta$.

Cette solution se rapporte évidemment aux figures 8 et 9, et démontre que dans ces deux cas le fil deviendra parfaitement horizontal.

Mais si nous supposons $l \sin. \alpha = Z_1 \sin. \beta$, la valeur de tang. α se présente sous la forme indéterminée $\infty \times 0 = \frac{0}{0}$; cependant elle est déterminée et finie, puisque sin. $\alpha = \frac{Z_1 \sin. \beta}{l}$ et que sin. β, déterminé par les équations (2) et (3) ne sera généralement ni nul, ni $= \frac{l}{Z_1}$; supposant donc ω infini et α fini, dans les équations (*a*) (*b*) (*c*) :

$$\int y' dm - \frac{P \text{ tang. } \alpha}{\omega^2} = 0$$

$$\int x'z'dm = 0$$

$$\int y'z'dm - \frac{P Z_1 \sin. \mathit{6}}{\omega^2} = 0.$$

On voit qu'elles se réduisent aux suivantes :

$$\int y'dm = 0, \int x'z'dm = 0, \int y'z'dm = 0,$$

uquelles on peut joindre l'équation identique $\int x'dm = 0$.

Donc en considérant la première position d'équilibre (*fig.* 7), voit *qu'un corps quelconque tournera avec une rapidité infinie tour de l'un de ses trois axes de rotation permanens devenu mobile.*

Telle est l'explication mathématique du phénomène de l'an-…, du cylindre, etc., qui tournent dans un plan horizontal …tour de leur centre.

Elle est très-curieuse, et en même tems très-utile, puisqu'elle …nit, comme on le voit, un moyen aussi simple qu'ingé-…ux, de déterminer les axes de rotation permanens des corps.

Observons aussi que pour cette même série de positions …7), on a tang. $\alpha > 0$, d'où l'on déduit au moyen de l'équa-…(1)

$$\frac{l \sin. \alpha}{\sin. \mathit{6}} > Z_1$$

…is on a (*fig.* 1), $\frac{l \sin. \lambda}{\sin. \mathit{6}} = AI$, $Z_1 = AG$, donc $AI > AG$.

…nc *le centre de gravité du corps ne se trouvera jamais sur …de rotation, tant que la vitesse ne sera ni nulle ni infinie.*

…ous terminerons cet article en appliquant ces généralités …ord au cas d'un cylindre homogène d'une épaisseur infini-…petite, suspendu par l'une de ses extrémités ; nous choi-…ns cet exemple de préférence, pour que notre solution puisse … comparée à celle de M. *Pagani*, puis ensuite au cas d'un …au circulaire.

Représentant par L la longueur du cylindre et faisant dans les équations (1), (2), (3), $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, $\int xy\, dm$, $\int yzdm$, $\int yzdm = o$, on trouvera, pour les conditions d'équilibre, ces deux équations:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{\omega^2}{g}\left[l \sin. \alpha - \frac{L}{2} \sin. \mathcal{C}\right] \qquad (m)$$

$$\text{tang. } \mathcal{C} = -\frac{\omega^2}{g}\left[l \sin. \alpha - \frac{2}{3} L \sin. \mathcal{C}\right] \qquad (n)$$

Or, en considérant toujours la même sorte d'équilibre (*fig.* 7), on voit qu'on aura tang. $\alpha > 0$, tang. $\mathcal{C} > 0$; donc

$$l \sin. \alpha > \frac{L}{2} \sin. \mathcal{C},\ l \sin. \alpha < \frac{2}{3} L \sin. \mathcal{C}$$

d'où l'on déduit ce résultat fort curieux:

Que le point du cylindre autour duquel il paraîtra tourner, sera toujours placé entre les deux tiers et la moitié de sa longueur, à partir de l'extrémité supérieure.

Or, quand le mouvement commencera, et que la vitesse sera encore infiniment petite, il est évident que la barre conservant sa position verticale, tournera réellement sur elle-même: cependant, pour peu qu'elle se dérange, elle ne tournera plus qu'autour d'un seul point, et ce point sera celui situé aux deux tiers de la barre, car on a alors dans l'équation [n], sin. $\mathcal{C}$ = tang. $\mathcal{C}$: plus elle se dérangera, plus le point de rotation montera; de telle sorte que pour une vitesse infinie, il arrivera au milieu de la barre qui est aussi son centre de gravité.

Si le cylindre, au lieu d'être homogène, se réduisait à deux sphères également pesantes, on trouverait, en supposant leurs masses concentrées dans leurs centres, que *ce même point de rotation serait toujours dans la moitié inférieure de la distance qui les sépare.*

Examinons maintenant le cas d'un anneau circulaire infiniment mince, suspendu par un point de sa circonférence.

En plaçant le plan de l'anneau dans le plan des ZX ou des ZY, les équations générales nous donneront d'abord les deux solutions suivantes : sin. $\varepsilon = 0$, ou sin. $\varepsilon = 1$, ce qui nous prouve qu'il se confondra avec le plan vertical du fil, ou bien qu'il lui sera perpendiculaire. Cette dernière solution représente évidemment la position d'équilibre stable, et c'est celle qui se produit dans l'expérience. Nous la choisirons donc de préférence, et nommant D le diamètre de l'anneau, et effectuant les intégrations nécessaires, l'équation (m) deviendra :

$$\text{tang.}\,\mathcal{C} = \frac{\omega^2}{9}\left[\frac{3}{4}\text{L sin.}\,\mathcal{C} - l\ \text{sin.}\,\alpha\right].$$

Une discussion analogue à celle que nous avons faite précédemment, et *relative à la même série d'équilibre*, nous conduira à ces autres résultats non moins simples et élégans :

Que l'anneau commencera son mouvement autour d'un point situé sur son diamètre vertical primitif, aux trois quarts de sa longueur, à partir de l'extrémité supérieure; qu'ensuite ce point s'élèvera de plus en plus, tandis que le plan de l'anneau s'inclinera davantage, et qu'enfin il se confondra, pour une vitesse infinie, avec le centre de cet anneau devenu horizontal.

Tels sont les différens résultats auxquels nous a conduits l'analise : on peut s'assurer facilement de l'accord qu'ils présentent avec les expériences très-précises de M. *Nérenburger*.

N. B. Il serait peut-être curieux de rechercher, dans le cas d'un cylindre infiniment mince, quelle est la nature de la courbe enveloppe de ses positions successives, *fig.* 7, 8 et 9; en la supposant construite et la faisant tourner autour de l'axe vertical de rotation, elle tracerait dans l'espace une surface de révolution qui jouirait de cette propriété, que quelle que soit la vitesse du cylindre, il sera toujours astreint à la toucher.

Rotation permanente d'une Zone plane, par M. PAGANI, professeur extraordinaire à l'Université de Louvain.

Considérons maintenant une zone plane homogène AmB m'A,

(*fig.* 10, pl. III), terminée par deux circonférences concentriques dont les rayons Ga, GA sont l', l, et qui est suspendue en A à l'extrémité du rayon GA. (*Voyez* pages 39 et 40 de ce vol.)

La zone étant parvenue à un mouvement permanent de rotation, dont la vitesse angulaire est θ, son centre de gravité G se trouvera sur la verticale qui passe par le point O, où est fixé le fil AO, qui la soutient. L'origine des coordonnées rectangulaires étant au point O, prenons la verticale OG pour axe des X, et prenons l'axe des Y dans le plan vertical qui passe par les points O, G, A.

Nommons : P le poids de la zone; y' l'ordonnée du point A où agit, dans le sens AM, la tension P du fil OA; x', x'' les abscisses des points N′, N″, par où passent les résultantes V, — V des forces centrifuges qui animent les parties de la zone situées au-dessus et au-dessous du plan horizontal passant par le centre G.

Nous aurons, pour seule condition de l'équilibre de la zone, l'équation

$$(h)\quad Py' = V(x'' - x')$$

Il faut que nous exprimions les quantités qui entrent dans cette équation en fonction des rayons l, l', de l'épaisseur Σ de la zone, de l'angle AGO $= \alpha$, et de la vitesse angulaire θ.

Pour cela, considérons deux élémens mn, $m'n'$, formés par deux plans horizontaux infiniment près l'un de l'autre. Le premier de ces plans coupera la verticale OG en un point q, le diamètre GA en un point p, et le plan de la zone dans la droite mm'; faisons, pour abréger $Gp=z$, $pm=pm'=u$, $pn'=pn'=u$. En observant que le plan de la zone est perpendiculaire à celui des x, y, on trouvera facilement

$$u=\sqrt{l^2-z^2}\,,\quad u'=\sqrt{l'^2-z^2}\,,$$

et

$$\left(\sqrt{l^2-z^2}-\sqrt{l'^2-z^2}\right)\Sigma\,dz$$

pour l'élément $mn = m'n'$.

En outre, il est clair que les composantes dans la direction qp des forces centrifuges qui sollicitent chaque point des élémens mn, $m'n'$, sont toutes égales entr'elles et à $qp\,\theta^2 = \theta^2 z \sin. \alpha$. Quant aux composantes des mêmes forces qui agissent dans le sens de pm, elles sont détruites par les composantes égales qui agissent selon pm'. Ainsi, en nommant v, la force centrifuge qui agit dans le sens de qp, et qui est égale à la somme de toutes les composantes des mêmes forces qui animent les deux élémens mn, $m'n'$, on aura

$$v = 2\Sigma\theta^2 \sin. \alpha \left(\sqrt{l^2 - z^2} - \sqrt{l'^2 - z^2}\right) z dz.$$

Le moment de la force v relativement au centre G, étant $v \times Gq$, et celui de la somme de toutes les forces v, ou de V, étant exprimé par V $\times$ GQ, on doit avoir

$$V \times GQ = Sv \times Gq,$$

la somme S devant s'étendre à tous les élémens de la zone qui sont au-dessus du plan horizontal passant par le point G.

On aura donc, en observant que $Gq = z \cos. \alpha$,

$$V \times GQ = 2\Sigma\theta^2 \sin. \alpha \cos. \alpha \left(\int_0^l z^2 dz \sqrt{l^2 - z^2} - \int_0^{l'} z^2 dz \sqrt{l'^2 - z^2}\right).$$

Mais il est aisé de trouver, par les méthodes connues,

$$\int_0^a z^2 dz \sqrt{a^2 - z^2} = \frac{\pi a^4}{16}$$

Partant

$$(k) \quad V \times GQ = \frac{\pi}{8} \Sigma\theta^2 \sin. \alpha \cos. \alpha \,(l^4 - l'^4).$$

D'un autre côté, on s'assure facilement que l'on doit avoir

$$y' = l \sin. \alpha, \quad P = \pi \Sigma g \, (l^2 - l'^2), \quad x'' - x' = 2GQ;$$

d'où

$$V\,(x'' - x') = \frac{\pi}{4} \Sigma \theta^2 \sin. \alpha \cos. \alpha \, (l^4 - l'^4);$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (h), on aura, après les réductions,

$$(l) \qquad \cos. \alpha = \frac{4gl}{(l^2 + l'^2)\,\theta^2}.$$

Si nous faisons l'application de la formule (l) aux cas particuliers d'un disque et d'un simple anneau, nous obtiendrons les suivantes:

$$(l') \quad \cos. \alpha = \frac{4g}{l\theta^2}$$

$$(l'') \quad \cos. \alpha = \frac{2g}{l\theta^2}$$

La première de ces formules s'obtient en posant $l' = o$, et la seconde en faisant $l' = l$ dans la formule (l).

En composant les formules (l'), (l'') avec celle-ci:

$$\cos. \alpha = \frac{3g}{l\theta^2},$$

que nous avons trouvée pour le cas de la rotation permanente d'une petite barre dont la longueur est égale à $2l'$; on voit qu'il existe une relation très-simple entre les cosinus des inclinaisons α dans les trois cas.

La résultante des forces centrifuges qui sollicitent chaque

moitié de la petite barre, passe à une distance du milieu de la barre, égale aux deux tiers de la demi-longueur, ou $^2/_3\, l$.

Pour trouver la distance GN du point N, par où passe la résultante des forces centrifuges qui sollicitent une moitié de la zone, on observera que $GQ = GN \cos.\alpha$, et que

$$V = Sv = 2\Sigma\theta^2 \text{ sn. } \alpha \left(\int_0^l zdz \sqrt{l^2 - z^2} - \int_0^{l'} zdz \sqrt{l'^2 - z^2}\right).$$

ou bien

$$V = \frac{2}{3}\Sigma\theta^2 \sin.\alpha\, (l^3 - l'^3).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (k), on aura :

$$\frac{2}{3} GN\, \Sigma\theta^2 \sin.\alpha \cos.\alpha\, (l^3 - l'^3) = \frac{\pi}{8}\Sigma\theta^2 \sin.\alpha \cos.\alpha\, (l^4 - l'^4);$$

d'où

$$(m)\ldots \qquad GN = \frac{3}{16}\pi\frac{l^4 - l'^4}{l^3 - l'^3}.$$

En faisant successivement $l' = o$, $l' = l$ dans la formule (m), on trouve :

$$(m')\ GN = \frac{3\pi l}{16},\ (m'')\ GN = \frac{4\pi l}{16}\pi l.$$

En comparant ces valeurs avec $\frac{2l}{3}$, qui convient au cas d'une barre très-petite, on voit les rapports qui existent entre les distances des centres des forces centrifuges aux centres de gravité, dans les trois cas particuliers d'un disque, d'un anneau et d'une barre. (1)

---

(1) M. *Pagani* nous a remis aussi une note sur la rotation d'une chaîne, expérience dont nous avons également parlé dans le volume précédent. Nous insérerons ce nouvel article dans un prochain numéro.

A. Q.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

PHYSIQUE.

Sur les points brillans d'un système de lignes variables selon une certaine loi, par A. Quetelet.

J'ai résolu, dans le volume précédent de la *Correspondance*, quelques problèmes relatifs aux points brillans d'une série de courbes qui varient par une constante que renferme leur équation; j'exprimais en même temps le désir de voir une solution plus générale de ces sortes de problèmes; M. *Pagani* a bien voulu me faire parvenir un Mémoire, qu'on verra sans doute avec plaisir, mais la solution ne concerne que le cas où le point de vue, le point rayonnant et les courbes données, se trouvent dans un même plan. J'ai tâché de résoudre le problème dans toute sa généralité, et je l'ai envisagé ensuite sous un autre point de vue, qui présente peut-être plus d'intérêt encore.

L'exemple suivant donnera une idée des problèmes dont il est question dans cette note. On grave sur un cachet ou sur tout autre instrument destiné à former une empreinte, une suite de lignes dont les équations ne diffèrent que par une constante, comme serait une série de cercles concentriques, et l'on demande de déterminer la courbe brillante, qui sera produite par la réflexion de tous les rayons lumineux, partis d'un point et réfléchis vers un autre. Ce problème a pour in-

verse la recherche des lignes qu'on doit graver sur le cachet, pour avoir une ligne brillante donnée; je m'occuperai également de cette question.

1. Soient M $(x', y', z',)$ et N $(x'', y'', z'',)$ le point de vue et le point rayonnant; les équations de deux droites passant par ces points, seront :

$$\left\{\begin{array}{l} x-x'=a(y-y') \\ z-z'=b(y-y') \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x-x''=a'(y-y'') \\ z-z''=b'(y-y'') \end{array}\right\} \dots (1)$$

Nommons Σ les courbes sur lesquelles se fait la réflexion, courbes qui ne diffèrent que par les constantes c et c', que renferment leurs équations

$$\Phi(y, x, c)=o \text{ et } \varphi(y, z, c')=o. \dots\dots (2)$$

Les équations générales d'une tangente à ces lignes sont :

$$x=\frac{dx}{dy}y+\alpha, \qquad z=\frac{dz}{dy}y+\beta \dots (3)$$

D'après la formule connue qui donne le cosinus de l'angle formé par deux droites en fonction de leurs tangentes, on exprimera de la manière suivante, que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, en représentant les coefficiens différentiels par ξ et ζ.

$$\frac{1+a\xi+b\zeta}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{1+a'\xi+b'\zeta}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}} \dots (4)$$

Si l'on remplace a, b, a' et b' par leurs valeurs, on pourra mettre l'équation sous cette forme plus régulière :

$$\frac{(y-y')\,dy+(x-x')\,dx+(z-z')\,dz}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+(z-z')^2}}$$

$$=\frac{(y-y'')\,dy+(x-x'')\,dx+(z-z'')\,dz}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2+(z-z'')^2}}$$

Nous remarquerons d'abord que, quand on connaît le point de vue et le point brillant, et que de plus les équations (2) sont connues, le problème donne toujours lieu à une équation (4), qui peut être exprimée en termes algébriques. Cette équation est celle d'une surface brillante S.

Si l'on observe que la différentiation fait disparaître des équations (2) les constantes c et c', et si l'on ne veut faire varier les courbes Σ, que par une de ces constantes, par c' par exemple, on prendra l'équation (4) avec le résultat de l'élimination de c' entre les équations (2), et l'on n'aura plus qu'une ligne brillante, intersection de deux surfaces.

Enfin, en prenant l'équation (4) avec les deux équations (2), on n'aurait que les points brillans déterminés sur la ligne Σ, qui n'est plus sujette à varier.

2. Avant de passer à des applications, nous examinerons le problème inverse du précédent. On regarde alors comme connue la surface brillante S, qui a pour équation,

$$F(x, y, z) = o \ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

et l'on veut déterminer les lignes réfléchissantes Σ. On aura, pour résoudre ce problème, les équations (4) et (5). L'équation (5) établira dans l'équation différentielle (4), les relations qui doivent exister entre les coordonnées x, y et z, pour satisfaire à la question; et l'intégration produira l'équation de la surface, qui est le résultat de l'élimination d'une des constantes entre les équations (2). Cette surface, dans le problème qui nous occupe, doit être considérée comme une surface striée réfléchissante, dont l'équation varie par la constante introduite par l'intégration.

Si, au lieu de donner une surface brillante, on ne donnait qu'une ligne S,

$$F(x, y) = o, \quad f(z, y) = o \ldots (6);$$

on aurait, pour déterminer les lignes réfléchissantes Σ, les équations (6) avec l'équation (4).

3. Nous remarquerons à l'égard des lignes réfléchissantes une propriété assez singulière, c'est qu'il existe toujours deux systèmes de lignes Σ, qui peuvent produire la même surface brillante S, et que de plus ces deux systèmes se pénètrent orthogonalement; pour mettre cette propriété en évidence, il faudra écrire l'équation (4) ou bien celle qui la suit, sous sa double forme, à cause des radicaux que nous représenterons par les lettres r et r',

$$\left.\begin{array}{l}(r'-r)+(ar'-a'r)\,\xi+(br'-b'r)\,\zeta=o\\(r'+r)+(ar'+a'r)\,\xi+(br'+b'r)\,\zeta=o\end{array}\right\}(7)$$

En employant l'équation (5) avec l'une ou l'autre des deux équations qui précèdent, on voit qu'on peut parvenir à deux systèmes de surfaces réfléchissantes Σ. Si l'on écrit les équations des plans tangens aux surfaces le long de la ligne de pénétration, et si, pour simplifier, nous représentons ces équations par

$$Ay+Bx+Cz+D=o,\qquad A'y+B'x+C'z+D'=o,$$

nous trouverons en effectuant les calculs que

$$AA'+BB'+CC'=o,$$

et que conséquemment pour chaque point d'intersection des deux surfaces Σ, il y a deux plans tangens perpendiculaires. Ainsi, *il existe toujours deux systèmes de lignes variables par deux constantes qui entrent dans leurs équations, lesquelles ont la propriété de réfléchir des rayons lumineux partis d'un point vers un autre point, en formant une même surface brillante, et ces deux systèmes se pénètrent orthogonalement.*

4. Appliquons ce qui précède à quelques exemples. Le cas le plus simple serait celui où les lignes Σ, sur lesquelles se fait la réflexion, seraient des parallèles à l'axe des y; ce qui fournirait pour les équations (2)

$$x=c,\ z=c'.$$

L'équation (4) de la surface brillante S, deviendrait ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$$

ou bien $a^2+b^2=a'^2+b'^2$, et conséquemment

$$\frac{(x-x')^2+(z-z')^2}{(y-y')^2}=\frac{(x-x'')^2+(z-z'')^2}{(y-y'')^2}$$

ce qui est l'équation d'une surface du troisième degré qui se réduit à celle d'un plan quand $y'=y''$.

Si nous introduisons dans l'équation précédente une des deux constantes que la différentiation a fait disparaître; si nous conservons, par exemple, $x=c$, ce qui réduit le système des droites réfléchissantes à être dans un plan parallèle à celui des zy, nous aurons une ligne brillante du troisième degré.

En conservant les équations $x=c$ et $z=c'$ pour porter les constantes dans l'équation précédente, on n'aura plus que les points brillans qui se trouvent sur la droite représentée par ces équations.

Prenons encore l'exemple suivant : posons pour les équations (2),

$$(x-x')^2+(y-y')^2=r^2 \quad \text{et} \quad z=c.$$

La différentiation donne :

$$(x-x')\,dx+(y-y')\,dy=o, \quad dz=o,$$

d'où l'on déduit pour l'équation de la surface brillante, après les réductions

$$(y-y')\,(x-x'')=(y-y'')\,(x-x');$$

c'est la trace d'un plan qui passe par les deux points donnés et qui est perpendiculaire au plan des xy.

5. En considérant le problème, dont il est question au commencement de cette note, c'est-à-dire, en supposant toutes les lignes réfléchissantes dans un même plan, celui des x, y, par exemple, la question se simplifie, et l'équation (4) devient celle d'une ligne brillante, sous cette forme,

$$\frac{(y-y')\,dy+(x-x')\,dx}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+z'^2}}=\frac{(y-y'')\,dy+(x-x'')\,dx}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2+z''^2}} \quad (8)$$

Supposons que la réflexion se fasse sur un système de droites parallèles à celle qui a pour équation $y=cx+c'$ et qui donne $dy=cdx$, on aura pour la ligne brillante

$$\frac{(y-y')\,c+(x-x')}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+z'^2}}=\frac{(y-y'')\,c+(x-x'')}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2+z''^2}};$$

après la réduction, on aurait une équation du troisième degré, comme plus haut.

6. Si l'on suppose le point brillant à une distance infinie, comme serait une étoile, et si les lignes réfléchissantes sont dans le plan de xy; il faudra supposer que tous les rayons incidens sont parallèles, et faire $x=x''$ d'où $a'=o$ et

$$\frac{dy+adx}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=\frac{dy}{\sqrt{1+b'^2}}:$$

mettant au lieu de a et b leurs valeurs, et faisant les rayons parallèles à la droite $z=b'y+a$ d'où $b'=\frac{z-a}{y}$, il viendra

$$\frac{(y-y')\,dy+(x-x')\,dx}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+(z-z')^2}}=\frac{ydy}{\sqrt{y^2+(z-a)^2}} \quad (9)$$

Examinons maintenant le cas particulier dont j'ai parlé dans le volume précédent de la *Correspondance*, et supposons qu'on

demande le lieu des points brillans que forment les rayons partis d'une étoile, en se réfléchissant sur un système d'ondes qui naissent à la surface d'une eau calme. Soient y et x, les coordonnées du centre d'ondulation, et r le rayon variable des ondes, nous aurons

$$(y-y_{,})^2+(x-x_{,})^2=r^2, \text{ et } (y-y_{,})\,dy+(x-x_{,})\,dx=o;$$

ainsi :

$$\frac{(y-y')(x-x_{,})-(y-y_{,})(x-x')}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2+(z-z')^2}}=\frac{y(x-x_{,})}{\sqrt{y^2+(z-\alpha)^2}}$$

En posant $z=o$, on voit que le lieu des points brillans est une courbe du quatrième degré. Quand on fait de plus $x'=x$, c'est-à-dire, quand on suppose le point de vue, le point brillant et le centre d'ondulation dans un plan perpendiculaire à celui des ondes, on a une équation du troisième degré qui se réduit à celle d'un cercle quand $\alpha=o$, car on obtient

$$(y_{,}-y')^2=(y-y')^2+(x-x')^2+z'^2,$$

il est remarquable que ce cercle a, pour centre, la projection horizontale du point de vue.

7. Passons au cas où le point de vue et le point brillant sont dans le plan des courbes réfléchissantes, ce qui donne

$$(10)\quad \frac{(y-y')\,dy+(x-x')\,dx}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}=\frac{(y-y'')\,dy+(x-x'')\,dx}{\sqrt{(y-y'')^2+(x-x'')^2}}$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$(11)\quad \frac{dy^2}{dx^2}+2\,\frac{(y-y')(y-y'')-(x-x')(x-x'')}{(x-x')(y-y'')+(y-y')(x-x'')}\,\frac{dy}{dx}=1$$

Cette équation est remarquable en ce qu'on aperçoit d'abord

que *le produit des deux valeurs que prend le coefficient différentiel, est égal à* -1, *et que conséquemment les tangentes des deux systèmes de courbes qui peuvent donner lieu par la réflexion à une même ligne brillante, sont à angle droit.*

En passant à l'application, le cas le plus simple serait celui où l'on aurait, pour ligne brillante S, une hyperbole dont l'équation serait

$$(y-y')(y-y'')-(x-x')(x-x'')=o,$$

on aurait pou déterminer les lignes Σ,

$$\frac{dy}{dx}=\pm 1; \text{ d'où } y=\pm x+c;$$

les lignes réfléchissantes formeraient donc deux systèmes de droites parallèles, et inclinées de 45° sur l'axe des x, ainsi: *on aperçoit une hyperbole équilatère brillante sur un plan, quand on produit la réflexion sur un système de droites parallèles. Le centre de l'hyperbole est sur le milieu de la droite qui joint le point de vue et le point rayonnant.* Cette même hyperbole peut aussi être produite par la réflexion des rayons lumineux sur un second système de lignes droites perpendiculaires aux premières, et parallèles entre elles.

8. Sans nuire à la généralité de la solution, nous remarquerons qu'on pourrait faire passer l'axe des x, par le point rayonnant et le point de vue, et placer l'origine à égale distance de ces deux points, quand l'un ou l'autre n'est pas à une distance infinie; il suffira pour cela de poser $x'=x''=o$ et $y'=-y''$, dans l'équation (10), d'où

$$\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{y^2-x^2-y'^2}{xy}\frac{dy}{dx}=1 \qquad (12)$$

Supposons que S, le lieu des points brillans, doive être une

circonférence, qui a pour équation

$$y^2 + x^2 + ax + y'^2 = o.$$

L'équation (12) pourra être mise sous la forme

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{2x + a}{y}\frac{dy}{dx} = 1$$

et, en résolvant,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + a}{2y} \pm \sqrt{\frac{4y^2 + 4x^2 + 4ax + a^2}{4y^2}};$$

au moyen de l'équation du cercle écrite plus haut, il vient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + a}{2y} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b^2}}{2y},$$

en intégrant, on a

$$y^2 + x^2 = c - (a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2})\, x.$$

On a donc, pour les courbes réfléchissantes Σ, *deux systèmes de circonférences concentriques, qui ont leurs centres sur l'axe des* x, *et la distance des deux centres est égale à* a, *c'est-à-dire, au double de l'abcisse du centre du cercle donné.* C'est le cas qui a été considéré dans le premier article.

9. Toutes les données étant dans un même plan, supposons le point brillant à une distance infinie sur l'axe des x; et le point de vue, à l'origine des coordonnées : nous n'aurons qu'à faire dans l'équation (11) $y' = x' = o$ et $x = x''$, $y'' = \infty$, d'où

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} = 1 \ldots \qquad (13)$$

Cherchons dans l'hypothèse précédente, quelles sont les lignes réfléchissantes Σ, pour une parabole brillante,

$$x^2 = -2my + m^2.$$

En résolvant l'équation (13), par rapport au coefficient différentiel, et en simplifiant par l'équation de la parabole, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - m}{x} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{x}.$$

L'intégration donne

$$\frac{1}{2}\log.(2y - m) = \log. x + c \quad \text{et} \quad y = m\log. x + c'$$

le premier système de lignes réfléchissantes se compose de paraboles, et le second de logarithmiques.

10. Nous finirons par une remarque qui peut avoir des applications curieuses pour le calcul intégral. Quand on a une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \varphi(x,y)\frac{dy}{dx} = 1,$$

on peut la regarder comme appartenant à un système de courbes qui ne diffèrent que par un paramètre, et qui ont la propriété de réfléchir les rayons partis d'un point vers un autre, de manière que tous les points brillans sont sur une courbe qui a pour équation $\varphi(x,y) = m$; m aura les valeurs que nous lui avons attribuées dans les équations (13), (12) et (11), selon qu'on supposera les points à des distances finies ou infinies.

Sur le lieu des points brillans d'un système de lignes planes ; par M. Pagani, Professeur extraordinaire à l'Université de Louvain.

Le problème où il s'agit de trouver l'équation de la courbe

formée par les points brillans d'une infinité de courbes, qui dérivent l'une de l'autre, par la variation arbitraire d'une constante que renferme leur équation commune, peut se traduire aisément en langage algébrique ; et l'on arrive, par ce moyen, à l'équation demandée que l'on peut exprimer, dans tous les cas, en termes algébriques. Voici premièrement la traduction du problème :

Rapportons tous les points d'un plan à deux axes rectangulaires fixes, au moyen de deux coordonnées x, y. Soit $y = f(x, c)$ l'équation d'une courbe quelconque tracée sur le plan, et dans laquelle c désigne une constante arbitraire. Représentons par $dy = pdx$ la différentielle de l'équation proposée, p étant une fonction des coordonnées x, y, sans c ; ce qui est toujours possible, puisque, par la différentiation, on peut faire disparaître une constante. Il est clair que l'équation $dy = pdx$ appartiendra à toutes les courbes contenues dans l'équation $y = f(x, c)$, et qui en résultent en donnant successivement des valeurs différentes à la constante ou paramètre c.

Cela posé, considérons deux points L, O, dont les positions sont données par les coordonnées a, b et a', b'. Si, des points L, O, on mène deux droites à un point M de la courbe représentée par l'équation $y = f(x, c)$, de manière que les droites LM, OM fassent, avec la normale MN à la courbe, les angles LMN, OMN égaux entre eux ; on aura facilement les coordonnées du point M, déterminé par cette condition sur la courbe $y = f(x, c)$. En éliminant, de l'expression des deux coordonnées du point M, le paramètre c, on aura l'équation de la courbe formée par tous les points brillans des courbes réfléchissantes contenues dans l'équation $y = f(x, c)$; le point lumineux étant L, et l'œil étant placé au point O.

Dénotons par λ l'angle que le rayon incident LM fait avec l'axe des x ; par ω l'angle formé avec le même axe, par le rayon réfléchi MO ; et par ν, l'angle que la normale MN fait aussi avec l'axe des x. La relation donnée par la nature de la

question, se réduit à

$$\lambda - \nu = \nu - \omega ,$$

ou bien

$$2\nu = \lambda + \omega ,$$

d'où

$$\text{tang. } 2\nu = \text{tang. } (\lambda + \omega);$$

et en développant,

$$\frac{2 \text{ tang. } \nu}{1 - \text{tang.}^2 \nu} = \frac{\text{tang. } \lambda + \text{tang. } \omega}{1 - \text{tang. } \lambda \text{ tang. } \omega}.$$

Or, il est aisé de voir que l'on a

$$\text{tang. } \nu = -\frac{dx}{dy}, \quad \text{tang. } \lambda = \frac{y-b}{x-a};$$

$$\text{tang. } \omega = \frac{y-b'}{x-a'}:$$

Partant,

$$\frac{2\dfrac{dx}{dy}}{\dfrac{dx^2}{dy^2} - 1} = \frac{\dfrac{y-b}{x-a} + \dfrac{y-b'}{x-a'}}{1 - \dfrac{y-b}{x-a} \times \dfrac{y-b'}{x-a'}}.$$

Mais nous avons supposé $dy = pdx$, p étant une fonction connue des coordonnées x, y, sans c. En substituant donc $\frac{1}{p}$ au lieu de $\frac{dx}{dy}$ dans la dernière, on aura celle de la courbe cherchée; et si, après cette substitution, nous developpons le second membre, nous obtiendrons enfin

$$\frac{2p}{1-p^2} = \frac{2xy - (a+a')y - (b+b')x + ab' + ba'}{x^2 - y^2 - (a+a')x + (b+b')y + aa' - bb'}.$$

Telle est l'équation générale de la courbe formée par les points brillans donnés par la réflexion du système de lignes comprises dans l'équation $dy = pdx$; les deux coordonnées du point lumineux étant a, b, et celles où l'œil est placé étant exprimées par a', b'.

On peut simplifier l'expression du second membre, en posant

$$(1) \quad \begin{matrix} a + a' = \alpha, & ab' + ba' = \gamma \\ b + b' = \beta, & aa' - bb' = \varepsilon \,; \end{matrix}$$

ce qui donne

$$(2) \quad \frac{2p}{1 - p^2} = \frac{2xy - \alpha y - \beta x + \gamma}{x^2 - y^2 - \alpha x + \beta y + \varepsilon}.$$

Appliquons maintenant cette équation à quelques exemples.

Le cas qui paraît le plus simple à considérer, est celui où l'on aurait la fonction p, égale à une constante ; ce qui réduit les lignes réfléchissantes à un système de droites parallèles, dont la tangente d'inclinaison à l'axe des x est p. Alors, il est évident que la courbe des points brillans est une hyperbole équilatère.

Supposons, en second lieu, $p = \frac{y}{x}$; ce qui exige que les lignes réfléchissantes soient des droites passant par l'origine des coordonnées. Dans ce cas l'équation (2) devient

$$(3) \quad \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2xy - \alpha y - \beta x + \gamma}{x^2 - y^2 - \alpha x + \beta y + \varepsilon}:$$

En développant cette équation, et en réduisant, on pourra aisément la mettre sous cette forme :

$$(4) \quad \alpha y(y^2 + x^2) + \beta x(y^2 + x^2) - \gamma(y^2 - x^2) - 2\varepsilon xy = 0.$$

Cette équation est, en général, du troisième degré, mais si nous supposons que le point lumineux et l'œil sont situés sur

l'axe des x, les équations (1) nous donneront $\beta = o$, $\gamma = o$; et celle que nous venons de trouver, deviendra

$$y^2 + x^2 = \frac{2\varepsilon x}{a};$$

équation d'un cercle dont la circonférence passe par l'origine, et dont le centre est placé sur l'axe des x, à la distance $\frac{\varepsilon}{a} = \frac{aa'}{a+a'}$.

Considérons maintenant les cas où l'on aurait $p = \rho \frac{x}{y}$, en dénotant par ρ un coefficient constant positif ou négatif. Il est facile de s'assurer que cette supposition réduit les lignes réfléchissantes à un système de sections coniques dont le centre est à l'origine, et qui varient de manière que le rapport ρ, entre le grand et le petit axe, ne change pas. Lorsqu'on fera ρ positif, on aura un système d'hyperboles; et si l'on prend ρ négatif, on aura un système d'ellipses. Le cas particulier où $\rho = 1$, appartient à un système d'hyperboles équilatères, et celui où $\rho = -1$, à un système de cercles concentriques.

Substituons donc, au lieu de p, sa valeur $\rho \frac{x}{y}$, et l'équation (2) deviendra, après les réductions,

$$(5) \quad \begin{gathered} 2(1+\rho)y^3x - 2(\rho^2+\rho)yx^3 - ay\left[y^2 - (\rho^2+2\rho)x^2\right] = \\ \beta x\left[(1+2\rho)y^2 - \rho^2x^2\right] - \gamma(y^2 - \rho^2x^2) + 2\varepsilon\rho xy. \end{gathered}$$

Cette équation, comme on voit, monte au quatrième degré; mais elle est susceptible de grandes réductions dans quelques cas particuliers, ainsi que nous allons le montrer.

Faisons d'abord $\rho = -1$; ce qui réduit les courbes réfléchissantes à des circonférences concentriques; l'équation (5) nous donne

$$(4) \quad ay(y^2+x^2) - \beta x(y^2+x^2) - \gamma(y^2-x^2) - 2\varepsilon xy = o;$$

et celle-ci est identique avec l'équation (4), relative au système de lignes droites, passant par l'origine. Il serait aisé de prouver cette identité à *priori*, en partant des propriétés du cercle ; mais il nous suffit de l'indiquer.

Si nous faisons $\beta=o$; $\gamma=o$, dans l'équation (4), nous retombons sur l'équation que M. *Quetelet* a trouvée pour ce cas ; et de même, si nous supposons seulement $b=o$, nous trouverons la seconde équation donnée par cet estimable savant, relative au cas qui répond à cette supposition (*).

Pour faciliter la discussion de l'équation (4), dans le cas général, nous allons transformer les coordonnées rectangulaires x, y, en coordonnées polaires, en posant $y=r\sin.\varphi$, $x=r\cos.\varphi$.

Au moyen de ces valeurs, l'équation (4) deviendra

$$\alpha r^3\sin.\varphi-\beta r^3\cos.\varphi-\gamma r^2(\sin.^2\varphi-\cos.^2\varphi)-2\varepsilon r^2\sin.\varphi\cos.\varphi=0.$$

Cette équation, ayant tous ses termes divisibles par r^2, nous montre déjà que la courbe a, au moins, un point double à l'origine.

Après la division, on aura

$$r(\alpha\sin.\varphi-\beta\cos.\varphi)=-\gamma\cos.2\varphi+\varepsilon\sin.2\varphi,$$

d'où

$$(6)\qquad r=\frac{\varepsilon\sin.2\varphi-\gamma\cos.2\varphi}{\alpha\sin.\varphi-\beta\cos.\varphi};$$

et maintenant que l'on a réduit l'équation de la courbe à une forme aussi simple, il sera bien aisé de la discuter et d'examiner sa nature dans tous les cas.

Si nous voulons que l'équation ne contienne que des quantités immédiatement données, on remplacera les quantités α, β, γ, ε par leurs valeurs des formules (1), et l'on aura, au

(*) Numéro VI du III[e] vol. de la *Correspondance*.

lieu de l'équation (6), la suivante

$$(7)\qquad r=\frac{(aa'-bb')\sin.2\varphi-(ab'+ba')\cos.2\varphi}{(a+a')\sin.\varphi-(b+b')\cos.\varphi}.$$

On peut encore, pour plus d'uniformité, substituer aux coordonnées rectangulaires a, b, a', b', des coordonnées polaires, en posant

$$a=r'\cos.\varphi',\qquad a'=r''\cos.\varphi''$$
$$b=r'\sin.\varphi',\qquad b'=r''\sin.\varphi'';$$

ce qui transformera l'équation (7) dans celle-ci

$$(8)\qquad r=\frac{r'r''\sin.(\varphi-\varphi'+\varphi-\varphi'')}{r'\sin.(\varphi-\varphi')+r''\sin.(\varphi-\varphi'')}.$$

Le cas particulier où le point lumineux et l'œil sont placés sur l'axe de x, se déduit aisément des formules (7) ou (8), qui s'accordent à donner, pour ce cas,

$$r=\frac{2aa'\cos.\varphi}{a+a'}=\frac{2r'r''\cos.\varphi}{r'+r''},$$

en observant que l'on doit avoir $\varphi'=o$, $\varphi''=o$, $r'=a$, $r''=a'$.

Examinons enfin l'équation (5) dans le cas général.

En transformant les coordonnées rectangulaires en coordonnées polaires, il sera toujours possible de la réduire au second degré, par rapport au rayon vecteur, ce qui permettra de la résoudre et d'avoir l'expression du rayon r en une fonction explicite de l'angle φ. Mais pour faciliter cette transformation, nous écrirons

$$y=tx,\quad x=r\cos.\varphi,$$

en faisant, pour abréger,

$$t=\text{tang}.\varphi.$$

Et d'abord, en substituant tx, au lieu de y, dans l'équation(5), celle-ci pourra se mettre sous cette forme, après avoir divisé tous ses termes par x^2,

$$2(1+\rho)(t^3+\rho t)x^2 - [\alpha t^3 + \beta(1+2\rho)t^2 - \alpha(\rho^2+2\rho)t - \beta\rho^2]x =$$

$$\gamma\rho^2 + 2\varepsilon\rho t - \gamma t^2.$$

Posons, pour abréger,

$$P = 2(1+\rho)(\rho + \text{tang.}^2\varphi)\,\text{tang.}\,\varphi,$$
$$Q = \alpha\,\text{tang.}^3\varphi + \beta(1+2\rho)\,\text{tang.}^2\varphi - \alpha(\rho^2+2\rho)\,\text{tang.}\,\varphi - \beta\rho^2,$$
$$R = \gamma\,\text{tang.}^2\varphi - 2\varepsilon\rho\,\text{tang.}\,\varphi - \gamma\rho^2,$$

nous aurons

$$Px^2 - Qx + R = o;$$

et en résolvant cette dernière, par rapport à x; en substituant ensuite $r\cos.\varphi$, au lieu de x, on aura

$$r = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P\cos.\varphi},$$

ayant soin de prendre pour r les seules valeurs positives.

Louvain, le 19 décembre 1827.

Expériences sur la rotation des corps, par M. NERENBURGER.

M. *Quetelet* m'ayant engagé à examiner les différentes circonstances du mouvement d'un corps suspendu par un point à l'extrémité d'un fil, et assujetti à se mouvoir en vertu d'une vitesse de rotation imprimée au fil, j'ai entrepris quelques expériences dont je vais donner ici les résultats.

Le cas d'une droite mathématique uniformément pesante, étant le plus simple de tous, je me suis occupé d'abord du

mouvement d'une barre homogène d'acier d'une petite épaisseur, suspendue par une de ses extrémités.

Une vitesse de rotation étant appliquée au fil, on remarque un mouvement circulaire dans la barre, tel, que celle-ci paraît décrire un cône dont le sommet est toujours au-dessous du centre de gravité du corps, et dont les bases, inférieure et supérieure, augmentent progressivement avec la force de rotation en vertu de laquelle le mouvement est produit. Ces deux bases se rapprochent dans le cas d'une vitesse croissante, et il semble que celle-ci devenant infinie, elles doivent se confondre, et la barre tourner horizontalement autour du centre de gravité.

Nous remarquerons toutefois que le point de la droite autour duquel s'opère le mouvement, ne peut être le centre de gravité lui-même que dans l'hypothèse d'une vitesse infinie; car, soient : S le point de suspension, A et B les extrémités de la barre, c le centre de gravité, c' son centre de rotation, p et p' les forces centrifuges qui sollicitent les extrémité A et B, R la résultante de ces deux forces et P la résultante des forces de la pesanteur qui sollicitent les molécules de la droite AB; celle-ci ne peut conserver la position d'équilibre représentée par la *fig.* 11, *pl.* III, qu'en vertu des forces R et P, qui concourent en un point m du fil représenté par SA, et se composent en une force unique r, dirigée suivant SA et détruite par la résistance du point S. On conçoit que cette réunion de circonstances ne peut avoir lieu qu'en supposant le point c' entre c et B, c'est-à-dire, constamment au-dessous du centre de gravité. Cette conséquence est en effet déduite de l'expérience, qui montre aussi que la vitesse augmentant, les points c et c' se rapprochent et tendent à se confondre. La tendance de la barre à devenir horizontale, est d'autant plus grande, que celle-ci est moins longue, elle dépend aussi de la longueur du fil. Les résultats suivans, déduits d'une série d'expériences faites sur une barre d'acier d'une longueur et d'un poids déterminés, feront connaître la marche du point de rotation pour des longueurs de fil variables.

LONGUEUR DE LA BARRE = 0,136.	POIDS DE LA BARRE = 1 gr., 3.	OBSERVATIONS.
LONGUEUR DU FIL.	DISTANCES du point de rotation au centre DE GRAVITÉ.	
0,788	0,0025	La distance du centre de gravité à l'une des extrémités de la barre = 0,0673.
0,688	0,0028	
0,588	0,0034	
0,488	0,0042	
0,388	0,0047	
0,288	0,0050	
0,200	0,0052	
0,150	0,0070	
0,100	0,0082	
0,050	0,0091	

Nous avons vu plus haut, que pour une longueur de fil déterminée, le point de rotation de la barre s'approche d'autant plus du centre de gravité que la vitesse devient plus grande; on conçoit donc que le premier de ces deux points, n'occupe les positions indiquées par le tableau ci-joint, qu'en supposant au système une vitesse de rotation uniforme et constante. Cette dernière, pour les résultats que nous faisons connaître, est telle que la barre fait trois tours et demi en une seconde. (C'est la plus grande vitesse que nous ayons pu obtenir). On remarquera que la quantité 0,0673 qui exprime la distance du centre de gravité à l'une des extrémités de la barre, n'est pas exactement la moitié de 0,136, expression de sa longueur. Cette anomalie

provient de ce que la barre n'est pas parfaitement homogène ou peut-être parfaitement cylindrique.

Quoiqu'il en soit, il résulte de nos expériences que la distance du point de rotation au centre de gravité, augmente lorsque la longueur du fil diminue, la vitesse étant constante. Il ne paraît pas que le rapport des accroissemens de cette distance, soit le même pour toutes les grandeurs du fil; car on voit que celle-ci, en passant d'une longueur de 0,1 à 0,050, produit un changement dans la position du point de rotation beaucoup plus sensible que pour toutes les longueurs précédentes. En voyant le point de rotation s'approcher sans cesse vers l'extrémité inférieure de la barre, on pourrait croire que dans le cas d'une longueur de fil très-petite, il finirait par se confondre avec cette extrémité; il n'en est pas ainsi cependant, car jamais le point de rotation ne dépasse un certain point, dont la distance au centre de gravité est de 0,0270. M. *De Salis* a fait voir que ce dernier point est toujours au sixième de la distance du centre de gravité à l'extrémité de la barre, dans l'hypothèse d'une barre homogène; mais ayant fixé aux extrémités de la barre, deux balles de plomb de poids égaux, le point de rotation s'est approché de l'extrémité inférieure, tellement qu'à la fin, la barre tournait sensiblement autour de ce dernier point.

Si, au lieu de suspendre le cylindre par une de ses extrémités, on rapproche le point de suspension du centre de gravité, la distance du point de rotation à ce dernier point diminue, et le cylindre tend à se mouvoir horizontalement jusqu'à ce que le point de suspension étant le centre de gravité lui-même, la barre affecte une position parfaitement horizontale.

En soumettant à l'expérience un anneau suspendu par un point de la circonférence, on le voit se mouvoir d'abord autour de la verticale; la vitesse augmentant, cette dernière droite décrit une surface conique, dont le sommet est situé comme dans le cas d'une droite pesante au-dessous du centre de gravité du corps. D'ailleurs les diverses positions du point de rotation résultent des différentes longueurs du fil pour une vitesse déterminée, et sa marche paraît être identique avec celle

du point analogue d'une barre cylindrique homogène. Dans le cas d'une vitesse infinie, le mouvement de l'anneau s'opère dans un plan horizontal, autour de son centre de gravité, comme le calcul le démontre.

Les mêmes conséquences sont appliquables au mouvement d'une ellipse et généralement d'une courbe quelconque, suspendue par un point quelconque pris dans son plan : c'est-à-dire, que le mouvement de rotation a toujours lieu autour d'un point de la droite qui joint le centre de gravité et le point de suspension de la courbe, et que ce point est toujours au-dessous du centre de gravité. Nous avons déduit ce résultat en examinant successivement le mouvement d'un triangle, d'un quarré, d'un cercle, d'une ellipse, et enfin d'une figure plane terminée par une courbe quelconque.

Ayant également soumis à l'expérience quelques corps solides, nous avons cru remarquer que le point de rotation autour duquel le corps se mouvait, était toujours au-delà du centre de gravité.

Tels sont les résultats de nos expériences, M. *De Salis* ayant entrepris les calculs relatifs au problème que nous venons d'examiner, a été conduit aux mêmes conséquences; nous sommes donc en droit de conclure que l'axe de rotation dans le cas dont il s'agit, ne peut être un des axes permanens du corps qu'en supposant à celui-ci une vitesse de rotation infinie.

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

Pont suspendu sur le Leck entre Vianen et Vreeswyk.

Sa Majesté, sur la proposition de Son Exc. le Ministre de l'intérieur, vient d'ordonner l'exécution d'un pont en chaînes

suspendu, sur le Leck entre Vianen et Vreeswyk, route de 1re classe de Bruxelles à Amsterdam.

Ce pont franchira la rivière qui a 200 aunes (mètres) de largeur à son niveau d'été, par deux arches de 100 aunes chacune; elles seront suspendues aux chaînes ancrées par leurs extrémités dans les massifs des culées des rives d'où elles sortiront, en s'appuyant sur des pyramides en pierre de 5 aunes de hauteur, et iront se réunir au sommet d'un arc de support de 11 aunes de hauteur, élevé sur une pile en maçonnerie construite au milieu du fleuve. Cette pile, d'une solidité et d'une élégance remarquables, sera munie d'un brise-glace en fer, pour rompre les glaçons des grandes débâcles.

Les hautes eaux d'hiver, qui s'étendent sur les côtés de la rivière, jusqu'à 5 à 600 aunes de largeur entre les digues, seront traversées par une suite de ponts suspendus de 20 aunes de longueur chacun.

La plate-forme du pont sera établie à huit aunes au-dessus des eaux ordinaires de navigation : ce qui l'élèvera à environ quatre aunes au-dessus des plus hautes eaux.

Un passage de 12 aunes d'ouverture avec un pont mobile, sera conservé pour la grande navigation.

L'exécution de ce projet remarquable par sa hardiesse et le mode de sa construction, fait entrevoir la possibilité de franchir d'une manière analogue, les autres grandes rivières de la Hollande.

On a l'espoir de voir cet ouvrage, dont les plans ont été dressés par M. l'ingénieur en chef *Vifquain*, et qui est d'un si haut intérêt pour la rapidité et la sûreté des communications, exécuté et achevé dans le courant de 1829.

STATISTIQUE.

Revue sommaire des ouvrages, tant originaux que traduits ou imités, publiés en différentes langues dans le royaume des Pays-Bas, pendant l'année dernière, non compris les écrits périodiques, les journaux, les gazettes, etc., et les réimpressions d'ouvrages publiés à l'étranger.

MOIS.	THÉOLOGIE.	Jurisprudence, médecine, physique, etc.	HISTOIRE.	PHILOLOGIE, Poésie, THÉATRE.	MÉLANGES, Romans.
Janvier	13	6	13	9	18
Février	7	8	7	5	39
Mars	8	13	10	14	13
Avril	6	9	6	10	30
Mai	10	15	6	6	22
Juin	7	15	10	14	19
Juillet	8	14	3	16	26
Août	7	13	11	5	27
Septembre	5	17	9	9	25
Octobre	8	20	13	10	28
Novembre	14	11	5	10	25
Décembre	6	5	3	6	14
TOTAL . . .	99	146	96	114	286

TOTAL GÉNÉRAL DES OUVRAGES 741

	Il a été publié en 1825.	En 1826.
Théologie	111	103
Jurisprudence, médecine, physique, etc. . .	93	105
Histoire.	94	96
Philologie, poésie, théâtre.	135	134
Mélanges, romans	246	325
TOTAL.	679	763

On voit donc, en comparant le nombre des ouvrages publiés pendant les trois années qui viennent de s'écouler, que l'année 1827 l'emporte sur l'année 1825, mais qu'elle cède elle-même à l'année 1826.

Ces documens sont tirés de la *Gazette des Pays-Bas*, qui les emprunte elle-même à la *liste des ouvrages nouveaux* qui se publie à Amsterdam.

NOTE.

— Dans le dernier numéro, il m'est échappé une erreur assez grave dans le résumé de mes calculs sur la nouvelle loterie. J'ai appris depuis que le gouvernement fait au joueur une remise de 35 fl. pour chaque billet sorti dans la première classe, et de 20 fl. pour chaque billet sorti dans la seconde : en faisant ces calculs, j'avais sous les yeux le prospectus de la loterie, imprimé à Bruxelles; ce prospectus ne faisant pas expressément mention de ces remises, je n'en ai eu connaissance qu'après l'impression de l'article. Du reste, l'espérance relative à chaque chance en particulier n'est aucunement altérée par cette erreur, qui porte tout entière sur l'espérance totale du joueur, qui se trouve par là augmentée de 5 fl. 50 cents, et sur le bénéfice du gouvernement, qui subit une diminution proportionnelle. Le nombre des billets sortis dans la première classe étant égal à 5000, la probabilité de sortie égale $\frac{5000}{50000} = \frac{1}{10}$. Ce qui donne pour espérance mathématique : $35 \times \frac{1}{10} = 3.5$. Le nombre des billets sortis dans la seconde classe est également de 5000; ce qui donne la même probabilité et pour espérance $20 \times \frac{1}{10} = 2.0$. Ainsi l'espérance totale du joueur, c'est-à-dire la valeur effective du billet de 46 fl., est de 35.8589 fl., au lieu de fl. 30.3589 comme je l'avais trouvée d'abord.

Quant à la perte essuyée par la masse des joueurs, il faut la

diminuer du montant des remises, ou de 275000 fl. En eff
tuant des calculs analogues à ceux qui terminent mon arti
précédent, on trouvera que la part du gouvernement est
$9\frac{11}{4600}$ pour 100. Ce qui donne, sur 2,300,000, un bénéfice
de 207,055 fl. La perte de chaque joueur individuellemen
s'élève à $22\frac{21}{4600}$ pour 100.

P. F. V.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Suite de l'analise de la Théorie élémentaire des transversales, par M. Garnier, professeur à l'Université de Gand.

Chapitre ix. *Des polygones variables suivant des conditions données. De quelques modes de déformation des courbes du second degré. Questions à résoudre.*

Quoique dans la première partie de ce chapitre, nous nous soyons quelquefois bornés à des indications, cependant telle que nous l'avons faite, elle servira à donner aux lecteurs une idée de ce genre de spéculations, et à ceux d'entre eux qui seront curieux d'approfondir ce genre de recherches, le désir de consulter la quatrième section de l'ouvrage déjà cité de M. *Poncelet*, dans lequel cette matière se trouve amplement développée, et d'ailleurs rattachée à d'autres théories qui n'entraient pas dans le plan de ce traité. Nous citons les sources où ce géomètre a puisé, en sorte qu'on pourra remonter aux premiers germes de cette doctrine encore peu répandue.

Théorème i. « Si tous les côtés d'un polygone quelconque, » tracé dans un plan, sont assujétis à tourner sur autant de » points fixes ou pôles, situés sur leurs côtés ou sur leurs pro» longemens, tandis que ses sommets, un seul excepté, par» courent respectivement des droites données de position, les » côtés et les angles changeront de grandeurs ; le sommet libre » décrira dans son mouvement une ligne du second degré, » passant par les deux points fixes sur lesquels pivotent ses

» deux côtés. » On considère d'abord le cas particulier d'un triangle, dont les trois pivots sont placés d'une manière quelconque sur les trois côtés, puis situés en ligne droite; de là, on s'élève successivement aux autres polygones, et on est conduit à cet autre énoncé : « Si un polygone plan quelconque, se » meut de façon qu'il demeure perpétuellement circonscrit à » un polygone donné de même espèce, et qu'il ait tous ses » sommets, à l'exception d'un seul, sur les différens côtés d'un » polygone de cette espèce, le sommet libre décrira dans son » mouvement une ligne du second ordre. » D'après ce théorème, si on prolonge deux côtés quelconques de ce polygone, jusqu'à leur rencontre en r, ce point parcourra une conique, au cas où le sommet libre décrit une ligne droite.

Théorème II. « Si tous les sommets d'un polygone plan quel» conque, sont astreints à se mouvoir sur autant de droites » fixes données dans ce plan, tandis que tous ses côtés, un » seul excepté, pivotent respectivement sur des points fixes, le » côté libre et les diverses diagonales rouleront par suite du » mouvement général de la figure, sur des sections coniques, » distinctes et tangentes aux droites fixes qui dirigent le mou» vement de ce côté ou de ces diagonales respectives. » Ce théorème, qui est une extension de la propriété de l'hexagone circonscrit à une conique, peut s'en déduire directement au moyen de deux corollaires.

Théorème III. « Si tous les sommets d'un polygone mobile » sur un plan, sont assujétis à parcourir autant de droites fixes » concourantes en un seul et même point S, que de plus tous » ses côtés, à l'exception d'un seul, se meuvent constamment » autour de points fixes, le côté libre et les diverses diagonales » du polygone, pivoteront également sur d'autres points fixes. » Comme tous les raisonnemens faits pour établir ce théorème, sont indépendans de l'hypothèse que la figure soit entièrement située sur un plan, la propriété subsiste également pour un polygone gauche dans l'espace, assujéti aux mêmes conditions. Il y a lieu à d'autres remarques.

Théorème IV. « Soit un polygone quelconque inscrit à une

» conique, si sur ses différens côtés *ab*, *bc*, *cd*...., on prend » des points fixes arbitraires *p*, *p'*, *p''*...., excepté sur le dernier côté *af*, qui restera libre; si l'on suppose que le polygone vienne à se mouvoir d'après ces conditions, le côté libre » et les diverses diagonales envelopperont dans le mouvement » général du système, certaines courbes qui seront autant de » sections coniques, ayant un double contact réel ou idéal » avec la proposée.» La démonstration de ce théorème, que nous établissons dans l'hypothèse d'un contact réel, est fondée sur un corollaire que nous nous contentons d'énoncer, et on en conclut que quel que soit le polygone que l'on considère, on parviendra toujours, par des constructions successives, à assigner les deux points fixes d'un dernier triangle dont le côté libre prendra successivement toutes les positions du côté libre du polygone en question : en sorte que, dans tous les cas, ce même côté roulera sur une conique ayant un double contact avec la proposée, suivant la droite qui renferme les deux derniers points fixes, et comme chaque diagonale du polygone proposé, le divise en deux autres dont l'un est en tout, assujéti aux mêmes conditions que le premier, et dont la diagonale en question est le côté libre, on voit que cette diagonale et toutes ses semblables, doivent rouler aussi sur des coniques.

Théorème v. « Si l'on suppose que tous les angles de rang » pair d'un polygone variable, qui a lui-même un nombre pair » de côtés, soient constans et se meuvent autour de leurs sommets respectifs considérés comme pôles, tandis que tous les » sommets de rang impair, un seul excepté, sont astreints à » demeurer sur des lignes courbes de degrés *m*, *n*, *q*...., prises » pour directrices, le sommet libre décrira lui-même une courbe » de degré $2mnq$..., et qui passera mnq.... fois, par chacun » des sommets fixes qui lui sont adjacens dans le polygone. » La démonstration de cet énoncé, que nous avons restreint, repose sur une proposition fort simple.

Nous terminons cette première partie du chapitre, par une analise succincte de quelques autres recherches de ce genre, qui sortaient du cadre de notre ouvrage.

Passons aux modes de déformation des courbes du second degré : 1° Ayant une courbe plane, une conique, par exemple, rapportée à deux axes quelconques, on incline toutes ses ordonnées d'une même quantité angulaire, en les faisant pivoter chacune sur son pied et dans le même sens; 2° on trace une seconde courbe qui coupe en parties proportionnelles toutes les ordonnées de la première; 3° d'un point pris à volonté sur le plan d'une conique, on tire tant de droites qu'on voudra, qui vont se terminer à la courbe, et on les divise toutes dans un même rapport, à partir du point de concours : l'ensemble de tous ces points de division, formera encore une conique semblable à la première. Dans les arts graphiques, on emploie souvent les deux premiers modes de déformation, dans lesquels les tangentes se déplacent, en tournant chacune autour d'un point fixe déterminé sur l'axe des abcisses.

Enfin, nous terminons ce chapitre par l'énoncé de quelques propriétés.

— *Genera et species* Orchidearum *et* Asclepiadearum, *quas in itinere per Insulam Javam jussu et auspiciis* Guilelmi I, *Belgarum regis augustissimi collegerunt* Dr Kuhl *et* Van Hasselt; *editionem et descriptionem curavit* J. G. S. Van Breda, *in Universitate Gandavensi professor, horti Gandavensis præfectus.* 2 *vol. in-folio,* 1 *fascicul. vol.* 1, 1827. *Gand. typ.* Vande-Kerckove.

Le service le plus important qu'on puisse rendre aux sciences naturelles, et notamment à la botanique, c'est de faire connaître des espèces nouvelles. Les voyages dans les contrées équatoriales, en fournissent une ample moisson; mais malheureusement, les naturalistes, chargés de les recueillir, ne sont que trop souvent victimes de leur amour pour les sciences, et ne laissent après leur mort que des notes faites à la hâte, ou des documens plus parfaits, mais encore épars et sans ordre. Ce fut le sort déplorable de MM. *Kuhl* et *Van Hasselt.* C'est donc bien mériter du monde savant, que de rassembler tous les matériaux laissés par les naturalistes voyageurs, de les comparer entre eux et de les réunir en corps d'ouvrage. Tel

a été le travail difficile de M. *Van Breda*. L'esprit sage et judicieux, la vaste érudition, et les connaissances profondes de cet illustre professeur, déjà placé au rang de nos premiers naturalistes, doivent être le plus sûr garant de la perfection de l'ouvrage annoncé.

Le premier fascicule qui vient de paraître, est orné de cinq superbes planches lithographiées et parfaitement enluminées. L'exécution typographique ne laisse rien à désirer.

(M. Morren, *cand. en sciences.*)

— Il vient de se former à Liége, un journal hebdomadaire, intitulé *la Récompense*, qui est particulièrement destiné aux enfans. Les dix premiers numéros qui ont paru jusqu'à présent, ne peuvent que donner une idée avantageusede cette utile entreprise, que les pères de famille accueilleront sans doute avec plaisir. « Nous avons pensé, disent les rédacteurs, qu'un journal qui paraîtrait une fois par semaine, et qui s'adresserait aux enfans, pourrait, dans des articles de peu d'étendue, écrits d'un style simple et clair, leur offrir une instruction profitable, donner à leur lecture plus de variété et d'attrait, et les encourager à des études de plus longue haleine. » Si les rédacteurs continuent à réaliser les espérances qu'a fait naître leur prospectus, il ne peuvent manquer de voir leurs efforts couronnés d'un plein succès.

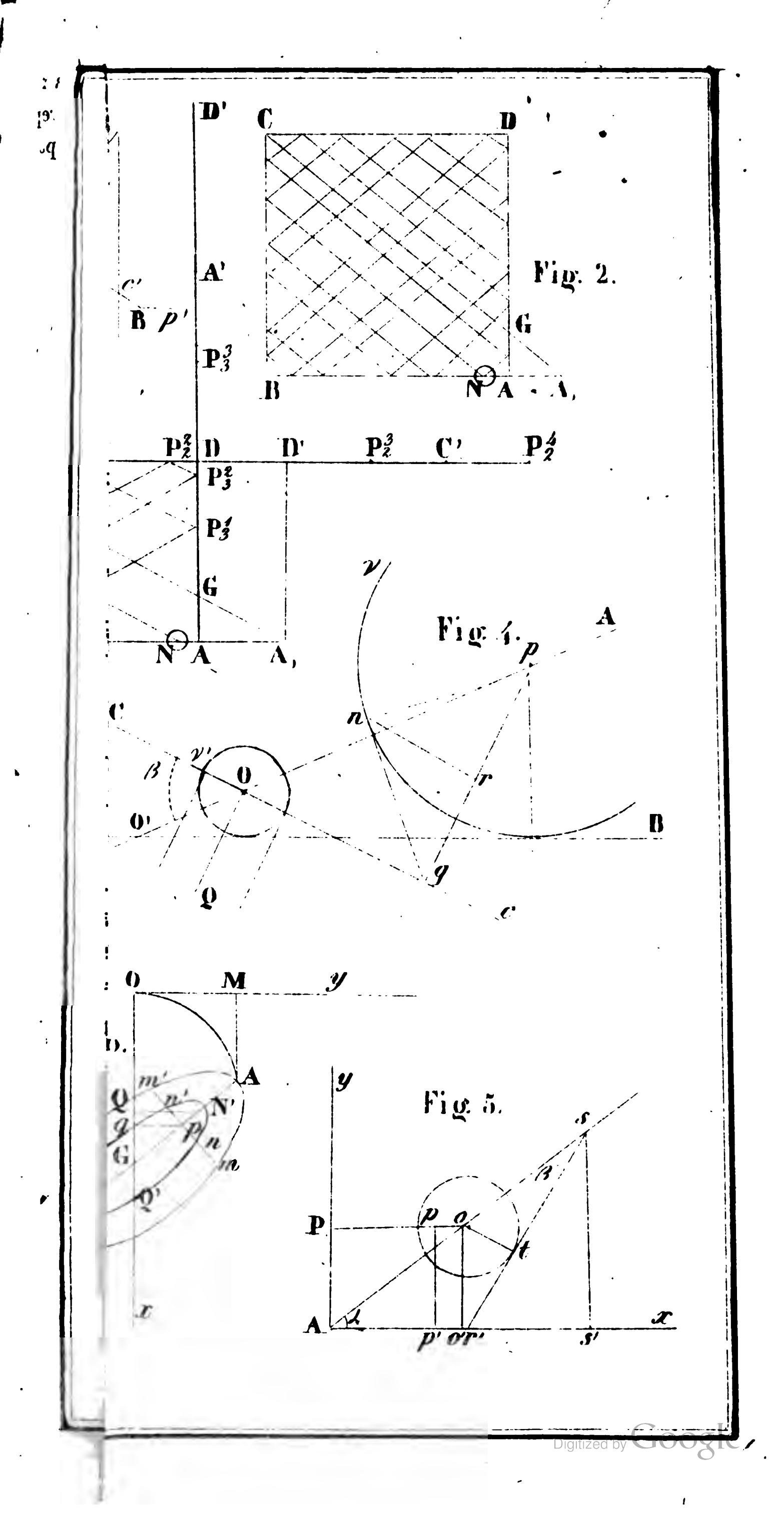
— M. *Jobard*, vient de mettre en vente la réimpression du 1er volume des *Forces productives et commerciales de la France*, par M. Ch. Dupin. Cet important travail, dont les résultats ont été si utiles à l'industrie française, est trop généralement connu, pour qu'il soit nécessaire d'en présenter ici une nouvelle analise. Il n'existe peut-être aucun journal littéraire ou scientifique, qui n'en ait rendu un compte à sa manière. La statistique est, pour ainsi dire, devenue de mode, et c'est, en grande partie, aux ouvrages de M. *Dupin* que l'on doit cette vogue; car les sciences ont aussi la leur. Il est à désirer cependant que la statistique, de même que la mécanique industrielle, dont les premières notions se sont répandues avec tant de rapidité, ne soient pas l'objet d'une curiosité

éphémère, comme les kaléidoscopes, les montagnes russes et les autres merveilles de ce genre. On n'aura pas à reprocher M. *Jobard* qu'il donne les mains à un changement pareil, si l'on en juge par l'empressement qu'il met à reproduire les ouvrages de M. *Dupin*, et à nous transmettre les découvertes nouvelles dans les arts que recueille *l'Industriel*.

QUESTIONS.

I. L'aire de tout triangle est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des triangles, formés en menant, par des points pris à volonté sur un côté, des parallèles aux deux autres. De plus, chaque parallèlogramme résultant, vaut la double racine carrée du produit des aires des deux triangles, qui ont chacun un côté commun avec lui.

II. On a une série de sphères élastiques qui se touchent suivant une même ligne, passant par leurs centres. On imprime à la première une vitesse donnée, dans le sens de la ligne des centres, et l'on demande quelles doivent être les masses de toutes les autres sphères, pour que la dernière ait la plus grande vitesse possible ?


D'
C
D
A'
Fig. 2.
C'
B
p'
G
B
N
A
A,
D
D'
C'
P
G
N
A
A,
Fig. 4.
A
p
n
C
v'
O
r
O'
B
q
Q
c
O
M
y
A
Q
m'
n'
N'
q
p
G
n
m
Q'
x
y
Fig. 5.
s
P
p
o
t
A
x
s'

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

d'un point pris sur l'axe d'une parabole, on mène deux rayons vecteurs à la courbe, on formera un secteur que l'on demande de partager en parties proportionnelles à des nombres donnés. Problème I, énoncé à la page 75, tom. IV de la *Correspondance;* par J. N. Noël, principal de l'Athénée de Luxembourg.

Soit B le point donné sur l'axe de la parabole proposée, BM BN les rayons vecteurs menés à la courbe (*fig.* 1, *planche* 4). nons $AB = m$, et supposons qu'il faille diviser le secteur N, que nous désignons par S, en deux parties proportionles aux deux nombres 1 et 5; l'une de ces parties vaudra donc

S. Soit MBR cette partie; soient x et y les coordonnées du int cherché R; ces coordonnées devant satisfaire à l'équation la parabole proposée, auront entre elles la relation $y^2 = 2px$, ns laquelle p est un nombre donné.

Soient a et b les coordonnées du point M, et a', b', celles du int donné N; il est clair que le secteur ABM se compose du gment $APM = \frac{2}{3}ab$ et du triangle $BMP = \frac{1}{2}b(m-a)$; on a nc

$$\text{secteur ABM} = \frac{2}{3}ab + \frac{1}{2}b(m-a) = \frac{1}{6}ab + \frac{1}{2}bm.$$

n aura de même,

$$\text{cteur ABN} = \frac{1}{6}a'b' + \frac{1}{2}b'm \text{ et secteur ABR} = \frac{1}{6}xy + \frac{1}{2}my.$$

On tire de là

$$\text{secteur MBN} = \frac{1}{6}(a'b' - ab) + \frac{1}{2}m(b' - b) \text{ et}$$

$$\text{secteur MBR} = \frac{1}{6}(xy - ab) + \frac{1}{2}m(y - b).$$

Ainsi, puisque ce dernier secteur est le 6me du précédent, désigné par S, il vient l'équation

$$\frac{1}{6}(xy - ab) + \frac{1}{2}m(y - b) = \frac{1}{6}S;\ \text{d'où } xy + 3my = q,$$

q représentant le nombre donné $S + ab + 3bm$.

Éliminant x entre les deux équations $y^2 = 2px$ et $xy + 3my = q$, on trouvera

$$y^3 + 6mpy = 2pq,$$

équation du troisième degré. Mais on peut déterminer autrement le point cherché R; car l'équation $xy + 3my = q$ étant la même chose que $y(x + 3m) = q$, si l'on pose $x + 3m = x'$ ou $x = -3m + x'$, il viendra

$$yx' = q,$$

équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. Or, en posant $x = -3m + x'$, on passe d'un système de coordonnées à un autre parallèle, dont l'origine est située sur l'ancien axe des x, du côté des abscisses négatives et à une distance de A égale à $3m$; d'où il suit que les asymptotes de l'hyperbole $yx' = q$ sont perpendiculaires entre elles. Si donc on construit cette courbe, son intersection avec la parabole proposée donnera le point R, qu'il s'agissait de déterminer.

Voici un problème qui a beaucoup d'analogie avec le précédent :

Étant donné un segment de parabole, terminé par la courbe et les coordonnées rectangulaires de l'un de ses points, diviser ce segment en deux parties dont le rapport soit donné, par exemple, celui de 2 à 1.

Dans ce cas, l'une des deux parties cherchées est nécessairement le tiers du segment à diviser. Or, si la ligne de division est une droite partant du pied de l'ordonnée, le point où cette droite coupera la parabole sera l'intersection de cette courbe avec l'hyperbole équilatère dont on aura l'équation ; et la solution sera exactement la même que celle du précédent problème.

Mais il existe encore une autre solution. En effet, si l'on mène les coordonnées de l'arc du segment proposé, et que sur chacune de ces ordonnées, on prenne une distance égale à son tiers, à partir de l'axe des x, la suite de points ainsi déterminés sera sur une parabole qui divisera le segment donné en deux parties doubles l'une de l'autre.

On résoudrait de même le problème où il s'agirait de diviser un segment d'ellipse en deux parties dont le rapport serait donné. Mais la méthode n'est pas applicable à la division d'un secteur d'ellipse ou de parabole, compris entre deux rayons vecteurs menés à la courbe, d'un point du grand axe : le problème, pour le secteur elliptique ne me paraît même pas résoluble par la simple géométrie analytique.

Note. En adressant à M. *Quetelet*, dans la lettre d'envoi d'un article pour la *Correspondance*, l'observation contre laquelle M. *Pagani* réclame à la page 45 du présent volume, je ne pensais nullement que cette observation serait publiée ; autrement j'y aurais ajouté une chose vraie, savoir : que M. *Pagani* n'a pu connaître en aucune manière ma solution, et que la méthode qu'il a suivie est très différente de la mienne.

Je n'avais d'autre but, dans cette note, que de faire remarquer à M. *Quetelet*, que la méthode où je fais usage des *numéros* ou *indices* des lettres, peut suppléer au calcnl intégral, dans le problème résolu par M. *Pagani*; et je n'attachais pas d'autre

importance à cette remarque, qui n'ôte rien d'ailleurs au mérite de la solution de M. *Pagani*, la seule exacte, en effet (1).

Sur les propriétés projectives dans les surfaces du second ordre, par M. Bobillier, professeur à l'École Royale des arts et métiers de Châlons.

Désignons par A et R les sections faites par un plan quelconque dans deux surfaces du second ordre A′ et R′, inscrite et circonscrite l'une à l'autre, et par L, l'intersection de ce plan avec celui de la courbe de contact; il est visible que cette courbe et les deux sections auront pour sécante commune la droite L, et que par suite les deux dernières lignes auront un double contact réel ou idéal, selon la même droite.

Supposons que la surface R′ soit de révolution, et soient $A_{,}$, $R_{,}$, $L_{,}$, les projections de A, R, L sur un plan perpendiculaire à l'un ou à l'autre des rayons vecteurs menés à l'une des extrémités du diamètre de R′, passant par le centre de $R_{,}$, les deux coniques $A_{,}$ et $R_{,}$ ont encore un double contact réel ou idéal, selon la corde $L_{,}$; mais en outre, $R_{,}$ est un cercle focal de $A_{,}$, et $L_{,}$ en est la directrice correspondante. (*Correspondance*, tom. III, pages 271 et 285.)

Imaginons maintenant que le plan de la double section devienne tangent à la surface R′, en sorte que la conique R′ se réduise à un point; alors, le cercle $R_{,}$ dégénérera en son centre, qui sera le foyer de $A_{,}$, et la directrice $L_{,}$ deviendra celle de ce foyer; il s'ensuivra donc ce théorème, qui comprend, comme cas particulier, celui énoncé à la page 12 du tom. III : Si l'*on inscrit dans une surface quelconque du se-*

(1) Quoique la seconde solution insérée dans la *Correspondance* manque de généralité, nous la croyons cependant exacte. Nous regrettons, faute d'avoir bien compris l'intention de M. *Noël*, d'avoir donné de la publicité à sa réclamation, qui se trouvait immédiatement après l'article qu'il nous faisait l'honneur de nous communiquer; cette circonstance a causé notre méprise. A. Q.

cond ordre, une surface de révolution qui touche en même temps l'une de ses sections planes; puis, que l'on projette cette section, son intersection avec le plan de contact et enfin son point de tangence, sur un plan perpendiculaire à l'un ou à l'autre des rayons vecteurs de ce même point; on aura une conique, l'une de ses deux directrices et le foyer qui lui est relatif; et de là, on déduit : *Si l'on coupe plusieurs surfaces du second ordre, circonscrites à une même surface de révolution, par un plan tangent à cette dernière, les projections des sections, sur un plan perpendiculaire à l'un ou à l'autre des rayons vecteurs du point de contact, sont des coniques qui ont pour foyer commun la projection de ce même point.*

Si la surface de révolution était un paraboloïde, l'un des plans de projection étant perpendiculaire à l'axe, ne varierait point, lorsqu'on changerait la position du plan tangent; on aurait donc ainsi un nouveau résultat, que je me dispenserai d'énoncer. — Un raisonnement analogue conduit encore à cette proposition : *Lorsque plusieurs surfaces du second ordre sont circonscrites à une même surface du même ordre, le plan tangent en l'un des ombilics de cette dernière, coupe toutes les autres, suivant des coniques, qui ont pour foyer commun le même ombilic, et pour polaires focales les intersections des plans de contact avec le plan tangent.* — Par des considérations tout-à-fait semblables, on parvient à un grand nombre de théorèmes curieux, parmi lesquels je citerai ceux-ci, dont le premier est une extension remarquable du théorème des projections stéréographiques ;

Si l'œil est placé sur la surface d'une sphère et le tableau parallèle au plan tangent de ce point :

1° *Les contours apparens de toutes les surfaces du second ordre, inscrites ou circonscrites à la sphère, sont des cercles ;*

2° *Les centres de ces cercles se trouvent sur les rayons visuels, menés aux pôles des plans de contact.* — *Deux des côtés d'un triangle sphérique étant fixes, si le troisième se meut de manière que le périmètre du triangle reste invariable, il enveloppera dans son mouvement un petit cercle.*

Sur la question II de la page 315; par le même (1).

Du centre b d'un cercle ayant pour rayon R, soit abaissée sur une droite fixe ao une perpendiculaire ba, et soit prise une distance $bc=\frac{R^2}{ba}$; le point c sera le pôle de la droite ao. (*Fig.* 2, *planche* 4.) Si l'on imagine actuellement que le rayon R, restant invariable, le centre b parcourre une droite ox, le pôle c décrira une certaine ligne qu'il s'agit de déterminer. — Prenons pour axes ox et oy perpendiculaires à oa, nous aurons $x=ob$, $y=bc=\frac{R^2}{ba}$; or, en désignant l'inclinaison aox par φ, il vient $ba=x\sin.\varphi$, et par suite $y=\frac{R^2}{x\sin.\varphi}$; ou bien $yx\sin.\varphi=R^2$. Le lieu demandé est donc une hyperbole ayant les deux axes pour asymptotes. — Pour résoudre le problème inverse, supposons que le centre d'un cercle de grandeur invariable décrive une droite ab, et proposons-nous de trouver la ligne enveloppe de toutes les polaires d'un point fixe c, (*fig.* 3.), soit $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ l'équation de ce cercle, par rapport à deux axes rectangulaires ox et oy, dont le premier est parallèle à la droite ab; l'équation de la tangente au point x', y' sera $(x-\alpha)(x'-\alpha)+(y-\beta)(y'-\beta)=R^2$. Si cette tangente doit passer par l'origine, il faudra que l'on ait $\alpha\,(x'-\alpha)+\beta(y'-\beta)+R^2=o$, c'est-à-dire, que les points de contact des tangentes issues de ce point, se trouvent sur la droite $\alpha\,(x-\alpha)+\beta\,(y-\beta)+R^2=o$; c'est dont là l'équation de la polaire du point o: en y faisant varier α, cette polaire restera constamment tangente à une courbe, dont on trouvera l'équation en différenciant la précédente, par rapport à α, ce qui donnera $\alpha=\frac{x}{2}$; puis, en éliminant

(1) Voyez sur le même sujet, le cahier précédent, où nous n'avons pu placer cet article qui nous est parvenu trop tard. A. Q.

cette variable, il viendra $x^2 + 4\beta.(y-\beta) + R^2 = 0$; ainsi, la ligne enveloppe est une parabole dont le grand axe est parallèle à l'axe de y. On déduit de ces résultats, par les polaires réciproques : Si les directrices de plusieurs coniques confocales concourent au même point, et qu'en outre, les droites qui unissent le point au foyer et au point de concours des tangentes communes à deux d'entre elles, forment un groupe harmonique avec les deux directrices correspondantes : 1° Les polaires d'un point quelconque, relativement à ces coniques, enveloppent une même conique; 2° les pôles d'une même droite sont aussi situés sur une même conique. — Il s'ensuit que, dans un tel système : 1° les diamètres conjugués des diamètres parallèles, dans une direction quelconque, enveloppent une même conique; 2° les centres sont situés sur une même conique, ainsi que les foyers non communs. — Il est facile de trouver des résultats analogues pour la sphère et les surfaces confocales.

Dans tout quadrilatère circonscrit à une parabole, les côtés opposés sont divisés en segmens proportionnels par une cinquième tangente. Problème énoncé à la page du IIIe vol., et résolu par M. Manderlier, candidat en sciences.

Soit un hexagone circonscrit à une parabole; on sait que les droites qui joignent les sommets opposés, se coupent en un seul point.

Si l'on suppose en premier lieu qu'une des tangentes passe à l'infini, on parviendra au théorème suivant :

Théorème I. Dans tout pentagone circonscrit à une parabole, les parallèles menées aux deux côtés d'un même angle, par les sommets opposés, et la diagonale qui joint les deux autres sommets, se coupent en un seul point.

Si, en second lieu, on imagine que deux des tangentes passent à l'infini, on aura cet autre énoncé :

Théorème II. Dans tout quadrilatère circonscrit à une parabole, les droites menées par les extrémités opposées de deux côtés adjacens, et respectivement parallèles à ces mêmes côtés,

se coupent sur le diamètre passant par le sommet compris entre les deux autres côtés (1).

Cela posé, soit ABCD un quadrilatère circonscrit, et MN une cinquième tangente quelconque. (*Fig.* 4, *planc.* 4.)

1° Dans le quadrilatère ABCD, AI parallèle à CD, CI parallèle à AD, et le diamètre par B, se coupent, d'après le second théorème, en un point I.

Il en est de même de MI′, CI′ et du diamètre par P, qui se coupent en un point I′, dans le quadrilatère circonscrit DMPC.

BI et PI étant deux diamètres, seront parallèles, et on aura :

$$CP : BP = CI' : I'I = DM : AM,$$

à cause de $CI' = DM$ et $I'I = AM$;

2° Il suit du théorème 1, que dans le pentagone MABCNM circonscrit, BI″ parallèle à MN, CI″ parallèle à MA, et la diagonale AN, se coupent en un point I″ : on aura donc

$$AQ : BQ = AN : I''N = DN : CN.$$

A cause des parallèles CI″ et DA. Donc etc.

---

(1) On trouve les développemens de ces deux théorèmes dans la *Théorie des Transversales*, que se propose de publier incessamment M. le professeur *Garnier*.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Sur les foyers dans les surfaces du second ordre. Lettre de M. **Bobillier**, professeur à l'École Royale des arts et métiers de Châlons. (*Voyez* page 270, tom. III.)

Lorsque je vous ai adressé le *lieu des sommets des cônes de révolution, astreints à passer par une courbe du second ordre*, j'étais loin de penser qu'il vous fût connu, et que vous l'eussiez vous-même signalé en 1820; j'ignore complétement aussi ce que MM. *Dupin* et *De Monferrand* ont donné sur ce sujet; l'isolement où je me trouve, le manque de communication, l'impossibilité où je suis de me procurer tous les ouvrages nouveaux dans une ville dépourvue de ressources sous ce rapport, me serviront d'excuse; au surplus, je m'estime fort heureux d'avoir rencontré une proposition découverte par des géomètres aussi distingués.

Il était naturel de chercher à généraliser cet intéressant résultat; je me suis donc proposé de déterminer le *lieu des sommets des surfaces coniques de révolution circonscrites à une même surface du second ordre.* Je vous prie, monsieur, d'avoir la bonté d'insérer ma solution dans votre *Correspondance*.

Afin de diminuer les calculs, je ferai d'abord remarquer que le sommet d'une surface conique, circonscrite à une surface du second ordre, se trouve sur le diamètre qui passe par le centre de la courbe de contact; mais si la surface conique

est de révolution, il se trouve aussi dans le plan perpendiculaire à celui de cette courbe, et conduit par ce grand axe; ce plan perpendiculaire doit donc contenir ce diamètre, ce qui ne peut visiblement avoir lieu, à moins qu'il ne se confonde avec l'un des plans principaux de la surface.

Supposons que la surface du second ordre soit un ellipsoïde donné par l'équation

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + b^2a^2z^2 - a^2b^2c^2 = o; \quad (1)$$

représentons par α et β les coordonnées, dans le plan des xy, du sommet d'un cône de révolution circonscrit, et par φ l'inclinaison de son axe sur la ligne des x; pour passer des plans coordonnés aux plans principaux du cône, il faudra se servir des formules connues

$$x = \alpha + x' \cos.\varphi - y' \sin.\varphi, \quad y = \beta + x' \sin.\varphi + y' \cos.\varphi, \quad z = z';$$

l'équation (1) deviendra conséquemment

$$b^2c^2 (\alpha + x' \cos.\varphi - y' \sin.\varphi)^2 +$$
$$a^2c^2 (\beta + x' \sin.\varphi + y' \cos.\varphi)^2 + b^2a^2z'^2 - a^2b^2c^2 = o,$$

et, en développant les calculs, elle prendra la forme

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dx'y' + 2Ex' + 2Fy' + G = o,$$

dans laquelle on aura

$$(2) \quad A = c^2(b^2 \cos.^2\varphi + a^2 \sin.^2\varphi), \quad B = c^2(b^2 \sin.^2\varphi + a^2 \cos.^2\varphi),$$
$$C = a^2b^2; \quad D = c^2(a^2 - b^2)\sin.\varphi\cos.\varphi, \quad E = c^2(b^2\alpha\cos.\varphi + a^2\beta\sin.\varphi),$$
$$F = c^2(a^2\beta\cos.\varphi - b^2\alpha\sin.\varphi), \quad G = c^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - a^2b^2).$$

Actuellement, si l'on désigne par u, v, w les coordonnées

courantes du plan tangent au point x', y', z' de cette surface, on sait que son équation est

$$(Ax'+Dy'+E)u+(By'+Dx'+F)v+Cz'w+Ex'+Fy'+G=o;$$

en supposant donc que le point de contact soit indéterminé, si l'on veut que ce plan passe par l'origine, il faudra écrire

$$Ex'+Fy'+G=o;$$

cette équation, jointe à celle de la surface, fera connaître le lieu des points de tangence; on voit que ce lieu est plan, et qu'il n'est autre que la courbe de contact de la surface conique circonscrite, ayant pour sommet la nouvelle origine.

En représentant généralement par $s=o$ l'équation d'une surface quelconque, et par $p=o$, $q=o$ celles de deux plans, la suivante $\pi s-pq=o$ appartient, n'importe la valeur attribuée à l'indéterminée π, à une autre surface qui renferme les sections faites dans la première par ces deux plans; car elle est satisfaite par $s=o$ et $p=o$ et aussi par $s=o$, $q=o$; si l'on pose $q=p$, l'équation résultante $\pi s-p^2=o$, représentera donc une troisième surface, qui touchera la surface $s=o$ sur tout le périmètre de la section faite par le plan $p=o$.

En partant de là, on conçoit sur-le-champ que le cône circonscrit dont il s'agit, a une équation de la forme

$$\pi(Ax'^2+By'^2+Cz'^2+2Dx'y'+2Ex'+2Fy'+G)-$$
$$(Ex'+Fy'+G)^2=o,$$

dans laquelle il reste à déterminer la constante π, ce que l'on fera en remarquant que le sommet étant à l'origine, elle doit devenir identique par la supposition $x'=o$, $y'=o$, $z'=o$, d'où résulte $\pi G-G^2=o$ ou $\pi=G$, substituant donc et réduisant, il vient pour l'équation cherchée

$$(AG-E^2)x'^2+(BG-F^2)y'^2+CGz'^2+2(DG-EF)x'y'=o.$$

Or, puisque cette surface conique est de révolution à tour de l'axe des x', le coefficient du terme en $x'y'$ doit ê[tre] nul, et ceux des carrés x'^2 et y'^2 doivent être égaux; on a do[nc]

$$DG-EF=o,\quad BG-F^2=CG;$$

il ne s'agit plus que d'éliminer φ entre ces deux équations, po[ur] avoir celle du lieu cherché dans le plan des xy.

Si l'on remplace à cette effet les lettres B, C, D, E, F, G par les expressions (2) qu'elles représentent, les deux équatio[ns] précédentes, toute simplification faite, seront

$$[(\alpha^2-\beta^2)-(a^2-b^2)]\sin.\varphi\cos.\varphi-\alpha\beta(\cos.^2\varphi-\sin.^2\varphi)=$$
$$2c^2\alpha\beta\sin.\varphi\cos.\varphi+c^2(\beta^2-b^2)\sin.^2\varphi+c^2(\alpha^2-a^2)\cos.^2\varphi=$$
$$b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2;$$

et, en faisant usage des formules trigonométriques,

$$\sin.2\varphi=2\sin.\varphi\cos.\varphi,\quad \cos.2\varphi=\cos.^2\varphi-\sin.^2\varphi,$$
$$\sin.^2\varphi=\frac{1-\cos.2\varphi}{2},\quad \cos.^2\varphi=\frac{1+\cos.2\varphi}{2},$$

elles deviendront

$$[(\alpha^2-\beta^2)-(a^2-b^2)]\sin.2\varphi-2\alpha\beta\cos.2\varphi=o, \qquad (3)$$
$$2c^2\alpha\beta\sin.2\varphi+c^2[(\alpha^2-\beta^2)-(a^2-b^2)]\cos.2\varphi=$$
$$2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2)-c^2[(\alpha^2+\beta^2)-(a^2+b^2)];$$

maintenant, pour éliminer φ, il suffira de prendre la somme de leurs carrés, après avoir multiplié la première par c^2, ce qui donnera

$$4c^4\alpha^2\beta^2+c^4[(\alpha^2-\beta^2)-(a^2-b^2)]^2=4(b^2\alpha^2+a^2\beta-a^2b^2)^2-$$
$$4c^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2)[(\alpha^2+\beta^2)-(a^2+b^2)]+c^4[(\alpha^2+\beta^2)-(a^2+b^2)]^2$$

équation que l'on peut écrire comme il suit :

$$[a^2\alpha^2+b^2\beta^2-a^2b^2][(b^2-c^2)\alpha^2+(a^2-c^2)\beta^2-(b^2-c^2)(a^2-c^2)]=o,$$

laquelle est décomposable en deux autres

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2-a^2b^2=o,\ (b^2-c^2)\alpha^2+(a^2-c^2)\beta^2-(b^2-c^2)(a^2-c^2)=o;$$

la première appartient à la section principale de l'ellipsoïde qui correspond à $z=o$; on pouvait prévoir la présence de ce facteur, attendu que chacun des plans tangens de cette surface peut être considéré comme une surface conique circonscrite, dont le demi-angle, au centre, est droit ; quant à la seconde, elle représente évidemment le lieu cherché sur le plan des xy.

Si l'on remarque que toute section conique a, en général, quatre foyers, dont deux réels et deux imaginaires, situés respectivement sur ses axes principaux ; si l'on se rappelle en outre qu'en effectuant certains changemens de ligne dans l'équation (1), ou en supposant que l'un des axes devienne infini, on peut lui faire représenter toutes les surfaces du second ordre, on déduira de l'analise qui précède, ce théorème général :

Si l'on construit une conique qui ait pour foyers ceux même de l'une des trois sections principales d'une surface quelconque du second ordre, et pour sommets les foyers des deux autres sections qui se trouvent dans le plan de la première ; toute surface conique circonscrite, dont le sommet sera situé sur l'une des trois coniques ainsi obtenues, sera de révolution.

Si s'agit, par exemple, d'un ellipsoïde, l'une des coniques est imaginaire ; l'autre est une ellipse qui lui est intérieure ; enfin la dernière, qui répond seule à la question, est une hyperbole perpendiculaire à l'axe moyen ; on conçoit que les deux surfaces cylindriques circonscrites, dont les génératrices sont parallèles aux asymptotes de cette courbe, sont de révolution.

Lorsque la surface du second ordre est privée de centre, l'une des coniques passe à l'infini, et les deux autres sont paraboliques.

Il est visible enfin que si elle était de révolution, l'une des trois coniques se réduirait à l'axe.

Il resterait à déterminer la ligne enveloppée par les axes de tous les cônes ; on pourrait y parvenir en partant de l'équation (3), d'où l'on tire

$$\text{tang. } 2\varphi = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 - (a^2 - b^2)};$$

mais il est probable que le calcul serait fort compliqué, et que l'équation finale, trouvée par cette voie, serait décomposable en deux autres, dont l'une appartiendrait à la développée de la section relative à $z = o$, et dont l'autre serait celle cherchée; il me paraît donc préférable de faire usage des considérations qui suivent :

Les deux coniques de la *fig.* 5, *planche* 4, sont concentriques et confocales, l'ellipse représente l'une des sections principales d'un ellipsoïde ; l'hyperbole est la ligne des sommets des cônes de révolution circonscrits à cette surface ; l'axe CK du cône dont le sommet est en C, divise évidemment l'angle des deux génératrices AC et CB en deux parties égales ; or, si l'on tire les rayons vecteurs FC, F'C, il y aura aussi égalité entre ces deux angles ACF et F'CB, car M. *Poncelet* a démontré, dans son *Traité des propriétés projectives*, que : *Si l'on joint, par des droites, le sommet d'un angle quelconque, circonscrit à une conique avec les deux foyers, ces deux droites forment respectivement deux angles égaux avec les tangentes*, pag. 277. — Il s'ensuit donc que l'angle FCK différence de ACK à ACF est égal à l'angle F'CK, différence de KCB à F'CB ; d'où il résulte que l'axe CK touche l'hyperbole en C. Ainsi, *tous les axes des cônes de révolution, circonscrits à une même surface du second ordre, enveloppent les trois coniques, lieux de leurs sommets.*

Je terminerai en indiquant les théorèmes que l'on peut déduire des précédens, par la théorie des polaires réciproques :

1° *Les plans des sections d'une surface du second ordre, qui, vues d'un point quelconque, paraissent des cercles* (ce tableau

est la surface d'une sphère concentrique au point de vue), *enveloppent une même surface conique du second ordre, et conséquemment passent par le même point;*

2° *Les centres de ces cercles se trouvent sur les rayons visuels, perpendiculaires aux plans déterminés par l'œil et par les génératrices de contact des plans des sections avec la surface conique qu'ils enveloppent.*

On peut remarquer que si l'œil se trouvait au foyer d'une surface de révolution, circonscrite à la proposée, la surface conique enveloppe deviendrait une droite, et tous les cercles précédens seraient concentriques (1).

Châlons, le 3 janvier 1828.

Une courbe quelconque se meut de manière à rester tangente à deux lignes AX, AY, formant un angle droit entre elles; on demande la courbe que décrit un point quelconque M, pris dans le plan de la courbe qui se meut (2).

Soient x et y les coordonnées de la courbe cherchée, prises par rapport aux axes AX, AY (*fig.* 6, *pl.* 4);

u, t les coordonnées de la courbe donnée, prises par rapport à deux axes, dont celui des u passe par le point M, et celui des t par le point de rencontre de la courbe et de l'axe des u;

l'équation de la courbe donnée, représentée par $f(u, t) = o$;

$\frac{dt}{du}$ — — — — — par $f'(u,t)$.

---

(1) *Erratum.* Page 271, tom. III; ordre des alinéa : 1° Soient prolongés, etc.; 2° Les mêmes, etc.; 3° On a donc, etc.; 4° On peut aussi, etc.; 5° Pour abréger, etc.; 6° Cela posé, etc.; 7° Lorsqu'une conique, etc.

Le radical $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ de la page 282, tom. III, doit être remplacé par $\sqrt{B^2 + C^2 + D^2}$.

(2) Cette question a été proposée d'une manière moins générale, à la page 268 du IIIe vol.; nous devons l'extension que nous présentons ici, à l'amitié de M. *De Behr*, ingénieur en chef du waterstaat.

l'angle variable que l'axe des u fait pendant le mouvement, avec AX . . . . α
les coordonnées du point de contact N avec AY dans une position déterminée. . . . . $u't'$
les coordonnées du point de contact N′ avec AX dans une position déterminée . . . . $u''t''$
la distance du point M à l'origine des coordonnées de la courbe qui se meut. . . . . m.

On aura, pour la sous-tangente TP, la valeur $t' \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha}$ et par suite

$$MT = t'. \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} - u' + m$$

mais

$$MT \cos. \alpha = x, \quad \frac{dt'}{du'} = \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha},$$

On aura donc les trois équations suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} f(u',t') = o \\ f'(u't') = \dfrac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha} \\ t' \sin. \alpha - u' \cos. \alpha + m \cos. \alpha = x\,; \end{cases}$$

de même, pour le point N′, on aura les trois équations

$$(B) \quad \begin{cases} f\ (u''t'') = o \\ f'(u''t'') = o \\ t'' \cos. \alpha - u'' \sin. \alpha + m \sin. \alpha = y. \end{cases}$$

Éliminant $u't'$, entre les trois équations A, ensuite $u''t''$ entre les équations B, on aura deux équations

$$F(x,y, \cos. \alpha, \sin. \alpha) = o \quad \text{et} \quad E(x,y, \cos. \alpha, \sin. \alpha) = o,$$

entre lesquelles on éliminera sin. α et cos. α, en observant que

sin. $^2\alpha$ + cos. $^2\alpha = 1$, l'équation finale est celle qui satisfait au problème.

Si, dans la fonction F', on change x en y, et sin. α en cos. α, cos. α en sin. α, on obtient la fonction E, et réciproquement.

Si la courbe donnée est une ellipse, et que le point M soit sur le grand axe $2b$, à la distance m^1 du centre, le calcul deviendra plus facile, en la rapportant à son centre, pris pour origine des u et des t. On trouve, en désignant par c et par s cos. α et sin. α,

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,\sin.\alpha,\cos.\alpha)=c^2(b^2-a^2-m^2)+2mxc+a^2-x^2=0 \\ E(x,y,\sin.\alpha,\cos.\alpha)=s^2(b^2-a^2-m^2)+2mys+a^2-y^2=0 \end{array}\right\} \text{(C)}$$

a étant le demi petit axe de l'ellipse. — Si, pour abréger, on fait

$$b^2-a^2-m^2=g^2$$

$$m^2x^2+g^2(x^2-a^2)=\mathrm{X}$$

$$m^2y^2+g^2(y^2-a^2)=\mathrm{Y}$$

on aura, après l'élimination, l'équation du huitième degré

$$\left.\begin{array}{l} 2m^2x^2+g^2y^2 \pm 2mx\sqrt{\mathrm{X}} \\ +2m^2y^2+g^2y^2 \pm\mp 2my\sqrt{\mathrm{Y}} \end{array}\right\}=g^4+2a^2g^2$$

ou

$$(2m^2+g^2)(x^2+y^2)\pm 2m(x\sqrt{\mathrm{X}}\mp y\sqrt{\mathrm{Y}})=g^2(g^2+2a^2) \text{ (D)}.$$

Si $m=0$, on trouve

$$x^2+y^2=a^2+b^2,$$

donc la courbe décrite par le centre de l'ellipse est un cercle. On trouve le même résultat pour l'hyperbole, et même pour

le parabole, en ayant égard à ce que son centre est placé à l'infini.

En remplaçant la courbe du second degré par une surface du deuxième degré, et les lignes AX, AY par trois plans rectangulaires, on trouvera que le centre de la surface qui se meut, décrit une sphère.

Si, dans les équations (C) on fait $a = o$, l'ellipse devient une ligne droite dont la longueur $= 2b$.

L'équation D se sépare alors en quatre équations :

1° Celle du cercle dont le rayon $= b + m$;
2° — — — — $= b - m$;
3° Celle de l'ellipse dont l'axe, parallèle aux x, $= b + m$;
. . . . l'axe, parallèle aux y, $= b - m$;
4° Celle de l'ellipse dont l'axe, parallèle aux x, $= b - m$;
. . . . l'axe, parallèle aux y, $= b + m$.

Après avoir fait disparaître les radicaux, on trouve que

$$(D) = [x^2 + y^2 - (b + m)^2]\,[x^2 + y - (b - m^2)] \times \ldots$$
$$\ldots \times [(b + m)^2x^2 + (b - m)^2y^2 - (b + m)^2(b - m)^2] \times$$
$$\times [(b - m^2x^2 + (b + m)^2y^2 - (b + m)^2(b - m)^2] = o;$$

la construction de l'équation donne la *fig.* 7, *pl.* 4.

On est surpris de ne pas retrouver l'ellipse unique, à laquelle on parvient en supposant, *a priori*, que la ligne droite $2b$ se meuve dans l'angle droit, en s'appuyant sur les deux côtés de cet angle; et l'on voit que cette droite conserve ici le caractère de son origine. En effet, plus l'ellipse qui se meut est excentrique, plus aussi la courbe, en forme de lemnices qu'elle produit, s'approche de celle du quart de la figure précédente, qui correspond à un angle droit : lorsque l'excentricité est infinie, l'ellipse, ou plutôt la droite, peut passer par un mouvement continu, du côté opposé de l'angle droit,

et décrire la figure précédente dans sa totalité, et en observant la loi de continuité.

Si le point M est au foyer, on a $g = o$, et l'on obtient pour la courbe cherchée, l'équation

$$(x^2 - a^2)y^2 + (y^2 - a^2)x^2 = 4m^2x^2y^2$$

ou (E)

$$(a^4 + x^2y^2)(x^2 + y^2) = 4b^2x^2y^2$$

dont la construction donnera quatre courbes égales, et symétriquement placées dans les quatre angles droits. L'analise de ses propriétés n'offre pas la moindre difficulté : une ligne droite ne pourra les rencontrer que dans quatre points ; mais l'origine des coordonnées est un point isolé et double, de manière que par cette considération la droite passant par l'origine des coordonnées, fait retrouver les six solutions exigées par le degré de l'équation.

La courbe représentée par l'équation (D) peut avoir un nœud, et affecter la forme d'un 8 ; réduite à des coordonnées polaires, son équation se simplifie et devient, en appelant ρ le rayon vecteur, c et s le sinus et le cosinus de l'angle θ, qu'il fait avec l'axe des x, $c^2s^2\rho^2(4b^2 - \rho^2) = 4a^4$, ou $\sin.^2 2\theta.\rho^2 = \frac{4a^4}{4b^2 - \rho^2}$.

Prenant ρ pour le rayon du cercle dans lequel on compte $\sin. 2\theta$, et faisant $4b^2 - \rho^2 = q^2$, on a $\sin. 2\theta = \frac{2a^2}{m}$, d'où résulte une construction très-simple pour obtenir un point de la courbe, au moyen d'un arc de cercle décrit d'un rayon $= \rho$, et qu'on divise ensuite en deux parties égales.

Si la courbe qui se meut, est une parabole dont l'équation soit $t^2 = pu$, les équations $E = o$ et $F = o$ deviennent

$$4mc^2 + ps^2 - 4cx = o$$

$$4ms^2 + pc^2 - 4sy = o$$

S le point M est le foyer, on a $m=\frac{p}{4}$ et

$$p=4cx$$
$$p=4sy$$

éliminant c et s, on obtient pour l'équation de la courbe cherchée

$$\frac{p^2}{16}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=1, \qquad \text{ou} \qquad (y^2+x^2)p^2=16x^2y^2;$$

cette équation deviendrait, en rapportant la courbe à des coordonnées polaires, ρ étant le rayon vecteur, c et s les sinus et cosinus de θ, qu'il fait avec l'axe

$$p^2\rho^2=16\rho^4c^2s^2,$$

ou

$$p=\pm 4cs\rho,$$

ou

$$\rho=\pm\frac{p}{2}\times\frac{1}{\sin.\ 2\theta}.$$

Si l'on compte les angles à partir de la ligne qui partage l'angle droit en deux parties égales, on aura, en appelant ces derniers angles θ'

$$\theta'=45^\circ-\theta, \quad 2\theta=90-2\theta', \quad \sin.\ 2\theta=\cos.\ 2\theta',$$

$\frac{1}{\cos.\ 2\theta'}=\text{séc.}\ 2\theta'$, enfin faisant le paramètre $p=2$, on a

$$\rho=\pm\ \text{sec.}\ 2\theta',$$

formule dont la construction est des plus simples, et dont la forme diffère peu de celle qu'on obtient par une ligne droite; puisque celle-ci est $\rho=\text{séc.}\ \theta$. La courbe est quarrable.

L'aire décrite autour de l'origine des coordonnées, a pour valeur

$$\frac{\text{tang. } 2\delta}{4} = \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{4}$$

la moitié du paramètre étant l'unité. De plus, si de l'extrémité d'une abscisse quelconque x, on abaisse une perpendiculaire sur le rayon vecteur correspondant, la longueur de cette perpendiculaire sera toujours la même, et égale au quart du paramètre.

Si n *nombres ne sont pas tous égaux entre eux, la puissance* $m^{ième}$ *de leur moyenne arithmétique, sera plus petite que la moyenne arithmétique des puissances* $m^{ièmes}$ *des mêmes nombres;* 2° *Si* n *nombres ne sont pas tous égaux entre eux, la moyenne arithmétique de leur puissances* $m^{ième}$ *sera plus* grande *que la moyenne géométrique de ces mêmes puissances*. Problème proposé à la page 76 de ce vol., et résolu par M. Lobatto, attaché au ministère de l'intérieur, pour ce qui concerne la direction des poids et mesures.

Nous démontrerons la première partie, en prouvant que si le théorème a lieu pour $n - 1$ nombres; il sera également vrai pour n nombres. A cet effet, dénotons ceux-ci par

$$a, \quad a + n\delta, \quad a + n\delta_1, \quad a + n\delta_2, \; \ldots \; a + n\delta_{n-2}$$

leur moyenne arithmétique s'exprimera par

$$a + \delta + \delta_1 + \ldots \delta_{n-2}$$

il faudrait donc que l'on eût toujours

$$[a + \delta + \delta_1 + \ldots \delta_{n-2}]^m < \frac{1}{n}[a^m + (a + n\delta)^m + \ldots (a + n\delta_{n-2})^m].$$

Posons pour abréger

$$\delta + \delta_1 + \delta_2 + \ldots . \delta_{n-2} = S$$

$$\delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots . \delta^2_{n-2} = S_2$$

. . . .

$$\overset{m}{\delta} + \overset{m}{\delta_1} + \overset{m}{\delta_2} + \ldots . \overset{m}{\delta_{n-2}} = S_m.$$

Le premier membre de l'inéquation ci-dessus, étant développ[é] donnera

$$\overset{m}{a} + m\overset{m-1}{a} S + \overset{1}{(m)} \overset{m-2}{a} S^2 + \overset{2}{(m)} \overset{m-3}{a} S^3 + \ldots \quad S^m \quad ($$

et le second

$$\overset{m}{a} + m\overset{m-1}{a} S + \overset{1}{(m)} \overset{m-2}{a} nS_2 + \overset{2}{(m)} \overset{m-3}{a} n^2S_3 + \ldots \overset{m-1}{n} S_m \quad ($$

$\overset{1}{(m)}$ $\overset{2}{(m)}$ etc., désignant les coefficiens successifs dans le dév[e]loppement du binome.

Les deux premiers termes étant communs aux quantités A et B, on voit qu'il ne s'agira que de faire voir que la somme des termes à partir du 3e, est plus petite dans A que dans B. Or, en supposant le problème démontré pour les $n - 1$ nombres δ, δ_1, δ_{n-2}, il est évident que l'on aura en général

$$\left(\frac{S}{n-1}\right)^m < \frac{1}{n-1} \cdot S_m,$$

ou bien $S^m < \overset{m-1}{(n-1)} S_m$ et à plus forte raison $< \overset{m-1}{n} S_m$, donc en appliquant ce résultat général à chaque terme en particulier des développemens (A) et (B), il en résulte directement que la première somme doit être plus petite que la seconde,

dans l'hypothèse dont il s'agit. En commencant maintenant par deux nombres quelconques, que nous pourrons représenter par $a + b$, $a - b$, il est clair que

$$\frac{1}{2}(a + b + a - b)^m = a^m < \frac{1}{2}[(a + b)^m + (a - b)^m].$$

Le théorème étant prouvé pour deux nombres, le sera également pour 3, 4, et en général pour n nombres.

Passons à la deuxième partie. Le procédé employé ci-dessus ne s'y appliquerait pas facilement, c'est pour cela que nous allons nous servir d'une voie plus courte, au moyen des développemens logarithmiques. Dénotons les n nombres par

$$a, \quad a - n\delta, \quad a - n\delta_1, \ldots a - n\delta_{n-2},$$

ce qui revient à supposer que a soit le plus grand entre eux; et observons que si le théorème a lieu pour ces nombres, il sera également applicable à leurs puissances m^{ièmes}, puisqu'on n'aura qu'à remplacer chaque nombre par sa puissance m^{ième}. Il s'agit donc de prouver que

$$a - [\delta + \delta_1 + \ldots \delta_{n-2}] > \sqrt[n]{[a(a - n\delta)(a - n\delta_1) \ldots (a - n\delta_{n-2})]}$$

ou bien que

$$\log.[a - (\delta + \delta_1 + \ldots \delta_{n-2})] > \frac{1}{n}[\log. a + \log.(a - n\delta) + \ldots \log.(a - n\delta_{n-2})]$$

le premier membre étant développé, donnera, en prenant le module $= 1$

$$\log. a - \left\{ \frac{S}{a} + \frac{1}{2}\frac{S^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{S^3}{a^3} + \frac{1}{4}\frac{S^4}{a^4} + \ldots \right\}.$$

et le second, en faisant usage de notre notation abrégée, et

après réduction

$$\log. a - \left\{ \frac{S}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{nS_2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{n^2S_3}{a^3} + \frac{1}{4} \frac{n^3S_4}{a^4} + \ldots \right\}$$

Or, d'après le théorème que nous venons de prouver, on a toujours $S^m < n^{m-1} S_m$, donc chaque terme en particulier, à partir du second, est plus petit dans la première série que dans la deuxième ; par conséquent.

Log. a — la première série $>$ log. a — la deuxième série.

C. Q. F. D.

Observation. En prenant $m = n$, il suit encore du deuxième énoncé, que la moyenne arithmétique des puissances n[ièmes] de n nombres est plus grande que le produit de ces nombres. On voit par les démonstrations qui précèdent, que moins les nombres différeront entr'eux, plus les valeurs des expressions dont il s'agit approcheront de l'égalité. Je crois que sous ce dernier point de vue, le théorème serait susceptible d'heureuses applications ; mais d'autres occupations m'empêchent pour le moment d'y réfléchir davantage.

Solution de la même question, par M. Bobillier, professeur à l'école royale des arts et métiers de Châlons.

Soit proposé de diviser un nombre a en n parties telles que la somme de leurs puissances m soit un *minimum*. En désignant cette somme par u et les n parties par x_1, x_2, x_3, ... x_n, on aura

$$x_n = a - x_1 - x_2 - x_3 \ldots x_{n-1} \qquad (1)$$

$$u = x_1^m + x_2^m + x_3^m \ldots + x_{n-1}^m + (a - x_1 - x_2 - x_3 \ldots x_{n-1})^m ;$$

pour trouver le *minimum* de u, il suffira d'égaler à zéro les $n-1$

coefficiens différentiels $\frac{du}{dx_1}$, $\frac{du}{dx_2}$, $\frac{du}{dx_3}$, ... $\frac{du}{dx_{n-1}}$, ce qui donnera

$$\frac{du}{dx_1} = mx_1^{m-1} - m(a - x_1 - x_2 - x_3 \dots x_{n-1})^{m-1} = 0$$

$$\frac{du}{dx_2} = mx_2^{m-1} - m(a - x_1 - x_2 - x_3 \dots x_{n-1})^{m-1} = 0$$

$$\frac{du}{dx_{n-1}} = mx_{n-1}^{m-1} - m(a - x_1 - x_2 - x_3 \dots x_{n-1})^{m-1} = 0$$

on tire de là et de l'équation (1), $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = \frac{a}{n}$; il est d'ailleurs visible que ces valeurs correspondent à un *minimum*, attendu qu'elles rendent positifs les coefficiens du second ordre $\frac{d^2u}{dx_1^2}$, $\frac{d^2u}{dy_1^2}$; en supposant donc que x_1, x_2, ... x_n soient des parties quelconques du nombre a, on pourra écrire

$$x_1^m + x_2^m + x_3^m \dots + x_n^m > n\left(\frac{a}{n}\right)^m;$$

d'où résulte en divisant par n et en remplaçant a par

$$x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_n,$$

$$\frac{x_1^m + x_2^m + x_3^m \dots + x_n^m}{n} > \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_n}{n}\right)^m$$

ce qui démontre le premier des théorèmes proposés; quant au second, on peut y parvenir par une manière analogue, mais je me dispenserai de le faire ici, attendu qu'il est une conséquence immédiate du suivant : *la moyenne arithmétique de plusieurs quantités positives est moindre que leur moyenne proportionnelle*, ce que je crois avoir établi d'une manière satisfaisante quoiqu'élémentaire, dans le livre III de mes *Principes d'Algèbre*.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE.

Expériences pour déterminer la différence de longueur du pendule à secondes, à Londres et à Paris; par le capitaine SABINE.

L'auteur commence son Mémoire par un rapport succint sur la valeur actuelle de l'unité de longueur en France et en Angleterre. Il observe que des expériences faites par M. *Arago* en 1817 et 1818, pour établir une comparaison immédiate entre les unités de mesure usitées dans les deux pays, ont été reconnues peu concluantes, parce que la marche des pendules n'avait pas été observée avec une exactitude suffisante.

L'auteur ayant obtenu un congé illimité, avec dispense du service militaire, aussi long-temps qu'il pourrait employer utilement son temps à des recherches scientifiques, pensa qu'il ne pourrait mieux satisfaire à cette condition qu'en accomplissant le projet qu'il avait conçu. En conséquence, il se rendit à Paris avec deux pendules, l'un construit par M. *Schumacher*, et l'autre appartenant au bureau des longitudes; il fit la comparaison de ces instrumens dans la salle de la méridienne à l'Observatoire Royal, au même endroit où M. *Biot* avait pris la mesure du pendule, et fut entouré de secours et de facilités de toute espèce. L'horloge de coïncidence était comparée régulièrement deux fois par jour, par M. *Mathieu*, avec la pendule de la lunette méridienne de l'Observatoire. Le 27 avril, le

temps étant au beau-fixe, les expériences furent commencées. Les résultats en furent rédigés en forme de tables, dont on donne une description détaillée.

Chaque pendule, quand on ne s'en servait pas pour observer les coïncidences, était employée avec un compteur pour déterminer sa marche, méthode usitée par MM. *Freycinet* et *Duperrey*, mais que l'auteur regarde comme inférieure à celle des coïncidences, quoique capable de fournir de bons résultats. Deux tables étaient réservées aux résultats de cette méthode. En réunissant toutes les expériences, il paraît que les nombres des oscillations effectuées par les deux pendules, pendant un jour moyen solaire, étaient à Paris, respectivement de 85922. 06 et de 85933.83, après les réductions accoutumées.

Les pendules avec leur appareil, furent renvoyés à Londres, par eau, au commencement de septembre, et leurs oscillations furent observées de nouveau dans la maison de M. *Browne*, Portland-Place, à l'aide d'une excellente horloge et des observations de passages faites par le capitaine *Sabine*. Les précautions que l'on a prises sont amplement détaillées, et les observations réduites en forme de tables, l'auteur étant aidé par M. *Quetelet* de Bruxelles. Ils trouvèrent pour résultat final 85933. 29 et 85945. 85 pour le nombre des oscillations du premier et du second pendule, pendant un jour solaire moyen, après avoir fait pour Londres les réductions nécessaires.

De toutes ces observations, l'auteur conclut que l'on peut évaluer à 12″ l'accélération que prend le mouvement du pendule en passant de Paris à Londres. La même accélération déduite de la mesure directe du pendule à secondes à Paris et à Londres, faite par M. *Biot* et le capitaine *Kater*, revient à 11″.76. ou, réciproquement, la longueur du pendule à secondes, mesurée par ce dernier à Londres, étant rapportée à Paris, en supposant un retard de 12″, ne donne qu'une différence de longueur de 0.^{pouces} 00023 avec le résultat de M. *Biot*, tandis que *Borda* en diffère de 0.00079. Le résultat du capitaine *Kater* ainsi corrigé, tient donc à peu près le milieu en

tre ceux de ces deux savans, quoiqu'il approche davantage de celui de M. *Biot* que de celui de *Borda*. (*Philosophical magazine*, *jan.* 1828).

Sur les erreurs des tables solaires.

Nous avons déjà inséré dans la dernière livraison du IIIe vol. de la *Correspendance*, quelques détails sur l'examen que M. *Airy* a fait des élémens des tables solaires, et qu'il a fait connaître dans l'une des séances de la société royale de Londres. Nous devons à l'obligeance de M. le capitaine *Sabine*, la communication des principaux résultats de M. *Airy*, l'on ne sera peut-être pas fâché de les voir reproduire ici.

L'époque, pour 1821,5, doit être augmentée de 5″,61.

L'époque du périgée, doit être augmentée de 46,3.

(Ces époques doivent être comptées du point équinoxial adopté par M. *Pond*, dans son catalogue pour 1826).

La plus grande équation du centre, doit être diminuée de 0″,84.

La masse de Vénus, doit être réduite dans le rapport de 10,000 à 8911;

La masse de Mars, dans le rapport de 10,000 à 6813.

Le coefficient de l'équation lunaire, doit être diminué de 1″,04.

Si ces corrections peuvent être admises, les limites des erreurs des tables de *Delambre*, grossièrement calculées, seraient: pour la plus grande erreur négative 11″,7 et pour la plus grande erreur positive 0″,5.

Il paraît que M. *Airy* a découvert depuis une nouvelle équation d'une période très-longue, qui dépend de Vénus; elle est de 240 ans environ, et son *maximum* est 3″. Ce savant s'occupe actuellement des calculs nécessaires pour en faire la communication à la société royale.

PHYSIQUE.

Seconde lettre de M. CRAHAY, professeur à l'Athénée de Maestricht, *sur la rotation d'une lentille qui descend le long d'un plan incliné*. Voyez pag. 46 et 48 de ce vol.

Permettez-moi, Monsieur, de revenir encore une fois sur l'expérience du verre de montre. Puisque le mouvement peut avoir lieu sans liquide, il faut donc en rendre compte sans avoir recours aux forces capillaires. C'est ce que j'ai tâché de faire, et je crois qu'en faisant ainsi abstraction de la capillarité, il n'y a pas de doute que le phénomène ne consiste dans le cas d'un corps qui roule sur un plan incliné par suite de ce que son centre de gravité n'est pas soutenu. Du premier moment que l'expérience est venue à ma connaissance, je me l'étais expliquée de cette manière, et j'y fus conduit par la considération d'un cylindre à base circulaire, couché sur un plan incliné: si l'axe du cylindre est parallèle à la ligne de plus forte pente, le cylindre ne roulera pas, il ne pourra descendre qu'en glissant parallèlement à l'axe, et si une cause quelconque, telle, par exemple, qu'une adhérence par un corps intermédiaire, l'empêche de prendre ce dernier mouvement, il restera en repos; mais si l'axe fait un angle avec la ligne de plus forte pente, le cylindre descendra en roulant dans une direction perpendiculaire à l'axe, et celui-ci restera constamment parallèle à lui-même, sa vitesse dépendra de l'inclinaison du plan et de l'angle que forme l'axe avec la ligne de plus forte pente. J'avais fait les calculs, ils ne présentent pas des résultats assez intéressans pour mériter que j'entre dans des détails à cet égard. Pour calculer l'accélération du segment sphérique, il faut tenir compte de son moment d'inertie, à cet effet, le segment doit être considéré comme tournant en s'appuyant sur un essieu dont l'axe

coïncide avec celui du segment, et dont le diamètre est égal à celui du petit cercle que parcourt le point d'appui dans son déplacement successif.

Quant à la question : si la capillarité *seule* peut aussi produire *une rotation continue dans le segment sphérique*, j'avais cru inutile de l'examiner dans ma note, puisque dans le phénomène dont il y est traité, cette force me semblait sans influence quant à la production du mouvement continu. D'ailleurs, je ne vois pas comment elle en serait capable. Le défaut d'homogénéité et de symétrie autour de l'axe ne peuvent faire naître, à ce qu'il me paraît, qu'un mouvement oscillatoire ; et je ne trouve pas non plus qu'une inégalité de la surface sur laquelle le segment est posé, puisse communiquer à celui-ci une rotation continue. Il est assez singulier que nous ayons observé des choses bien différentes dans des circonstances qui semblent être les mêmes. Vous dites, Monsieur, qu'en vous servant de lames parfaitement planes et de lentilles dressées avec soin, et qu'en répandant le liquide bien également entre les deux verres, vous remarquiez chaque fois que la lentille glissait sans mouvement de rotation; tandis que, de mon côté, je trouve qu'avec des surfaces exactement travaillées, et lorsque les bords du liquide forment une courbe parfaitement régulière entre les deux verres, le segment tourne aussi aisément, si ce n'est mieux, que lorsqu'il y a des irrégularités, soit dans les surfaces, soit dans la distribution du liquide (1). Que le verre glisse aisément, sans tourner, lorsque toute la glace est mouillée, j'en ai prévenu dans ma note, et je crois que la raison en est claire, d'après la fonction que remplit le liquide dans ma manière de voir;

(1) Il y a lieu de s'étonner effectivement de cette différence de résultat, d'autant plus que depuis mon premier article, plusieurs personnes m'ont assuré avoir observé la même chose que moi : il faudrait donc de nouvelles expériences pour me convaincre, malgré toute la confiance que m'inspirent les résultats d'un observateur aussi habile et aussi consciencieux que M. *Crahay*. A. Q.



il ne me semble pas non plus, que c'est dans ce cas que vous avez observé avec M. *Stratford*, qu'il descendait sans rotation. J'ai avancé qu'en se servant d'une glace enduite d'une légère couche de graisse, le point de contact se montrait à l'œil, placé dans une position convenable, comme une petite tâche noire, laquelle rendait très-sensible le déplacement du point d'appui pendant que l'on inclinait la glace, déplacement qui correspond à celui du centre de gravité, et qui, pour cette raison, est aussi plus fort avec une lentille biconvexe, solide, ou formée de deux verres de montre réunis par leurs bords, qu'avec un seul verre; et qui est d'autant plus fort que le rayon de courbure est plus petit. En substituant un liquide à la graisse, je remarque distinctement que le segment s'incline en avant, quand je soulève la glace, ce qui indique encore que le point d'appui se déplace. Vous assurez au contraire qu'avec toute l'attention possible, vous trouvez généralement très-peu de déplacement dans le point d'appui. — De nouvelles expériences nous apprendront bientôt la cause de la diversité des résultats que nous avons obtenus l'un et l'autre.

Maestricht, le 17 février 1828.

Inclinaison et déclinaison de l'aiguille magnétique, observées à Nimègue, par M. le Général KRAYENHOFF.

M. le général *Krayenhoff* a continué ses observations sur la déclinaison et l'inclinaison de l'aiguille magnétique à Nimègue (1). Comme ces résultats peuvent être intéressans pour la science, nous les reproduirons ici. Les observations ont été faites au moment du passage du soleil au méridien ; et la variation diurne a été prise, chaque jour, une heure après le lever du soleil.

MOIS.	DÉCLINAISONS MOYENNES.	VARIATIONS MOYENNES.
Janvier	21° 35′ 30″	5′ 0″
Février	» 35 20	6 0
Mars	» 35 50	6 40
Avril	» 35 50	6 45
Mai	» 34 30	5 40
Juin	» 34 30	7 30
Juillet	» 35 30	11 0
Août	» 36 0	10 48
Septembre	» 33 47	9 45
MOYENNE. . . .	21° 35′ 12″	7 41

La variation la plus forte a eu lieu le 8 septembre ; elle s'élevait à 21′ ; la moindre variation avait eu lieu le 18 du mois précédent, elle n'était que de 1′.

Il est remarquable que la variation fut une fois négative, le 10 septembre ; elle était — 6′ 30″.

Quant à l'inclinaison de l'aiguille, sa valeur est 69° 35′ et non 67° 5′, comme l'indiquait l'*Annuaire* de l'année précédente.

(1) Voyez *Correspondance Mathématique*, vol. IIIe, pag. 54 ; ces détails sont tirés du *Jaarboekje* de M. *Lobatto*.

Sur un singulier effet de la réflexion des rayons solaires, lettre de M. MORREN, Candidat en sciences.

Parmi les phénomènes naturels que nous offre la lumière, il n'est guère que ceux dont les causes dépendent, soit de la décomposition des rayons solaires, tel que l'arc-en-ciel, soit de la réfraction de ces mêmes rayons à travers des milieux de densité différente, tel que le mirage, qui aient fixé l'attention des physiciens. Les effets de la simple réflexion, qui peuvent s'observer dans la nature, ont été négligés, sans doute à cause de la simplicité même de leur explication. Mais il me semble que cette simplicité est une des raisons qui devraient nous porter à les considérer d'abord ; car, plus l'explication d'un phénomène physique est facile à donner, moins est-on sujet à l'erreur. D'ailleurs, les effets de la réflexion des rayons solaires font sur l'esprit de l'observateur une aussi forte impression que ceux du mirage : phénomène que j'ai eu le loisir de voir souvent sur les larges sommets en plaine de nos montagnes ardennaises. Les phénomènes dont je vais vous entretenir font un effet tout aussi surprenant et extraordinaire que le mirage ; et comme ils peuvent se reproduire fort souvent et dans beaucoup de pays, je crois utile de les faire connaître.

Lorsqu'en hiver l'air est chargé de brouillards qui descendent le soir jusque sur la surface de la terre, il arrive souvent qu'on voit le soleil comme un disque lumineux, d'où partent en rayonnant des gerbes éclairées fort larges, comme on en observe quelquefois entre les séparations des nuages que l'astre du jour éclaire par le haut. Or, lorsque cette circonstance a lieu, par exemple, au crépuscule, et qu'on se trouve près d'un canal bordé d'arbres sur les deux rives, voici ce qu'on remarque. Le soleil est près de descendre sous l'horizon ; une gerbe de lumière passe en-dessous des cimes des arbres, en cache les derniers, et vient frapper la surface du canal. Là, elle se réfléchit, et comme l'angle d'incidence est égal à celui

de réflexion, cette gerbe va en se relevant et en divergeant, passe entre les troncs et en-dessous des cimes des arbres qui se trouvent sur la rive opposée. Mais, comme l'observateur ne voit cette gerbe que de loin et en perspective, il ne la voit pas tout en entier : les arbres qui sont près de lui, lui cachent le commencement de la gerbe qui vient du soleil et la fin de celle que réfléchit l'eau. Il ne peut donc voir l'origine ni pressentir la cause du phénomène, et pour peu qu'il ne s'en rapporte qu'à ses yeux, il sera trompé. Car, notez que la gerbe d'un côté, part du soleil en divergeant, et que l'autre part aussi en divergeant de la surface de l'eau, et comme cette eau est éclairée par la gerbe, on ne peut, à cause du brouillard qui offusque en partie les objets et augmente davantage l'illusion, on ne peut, dis-je, distinguer la gerbe de l'eau du canal. C'est ce qui fait que l'observateur croit voir un canal divisé, à certaine distance de lui, en deux autres canaux. Le canal sur lequel il vogue, ou sur les côtes duquel il se promène, semble se bifurquer; l'une branche va à gauche, l'autre à droite; et, comme ces deux canaux apparens vont en diminuant de largeur à mesure qu'ils semblent s'éloigner de lui, comme le feraient de véritables canaux vus en perspective, on conçoit comment il est facile de se tromper.

J'ai été mainte fois témoin de ce phénomène, qui d'ailleurs doit se reproduire presque journellement dans un pays aussi creusé de canaux que le nôtre, et dont l'air est si souvent chargé de brouillards. Les premières fois que j'aperçus ce singulier effet, je fus trompé par l'illusion, et je crus voir devant moi le confluent de trois canaux. J'ai tâché de rendre cette apparence d'optique dans la *fig*. 8.

Les pays montagneux offrent parfois un phénomène analogue; on l'a observé en Allemagne. Il peut se répéter dans nos provinces méridionales, celles de Luxembourg par exemple, de Liége, de Namur, où toutes les conditions requises existent.

Il arrive en effet, qu'au lever ou au coucher du soleil, si on se trouve dans une vallée assez profonde, dont les montagnes latérales sont entrecoupées par d'autres vallées transversales, qui

communiquent pas d'un côté à l'autre de la vallée où l'on se ve; et si, alors, une de ces vallées transversales, (j'en suppose à droite) se trouve dans le prolongement du point où est leil un peu levé sur l'horizon, elle permettra à la lumière t astre de passer dans la vallée de l'observateur. Cette ère viendra alors à droite et ira frapper le flanc du rocher e trouve vis-à-vis de la vallée transversale par où elle est ée. Or, cette lumière se réfléchira sur le flanc, si la nature errain le permet, et retournera dans la vallée. D'où il suit l'observateur verra la lumière venir de gauche et se diriger oite en cône divergeant : ce qui l'étonnera fort, s'il fait at-ion que le soleil est à droite. Il verra donc la lumière venir pas du soleil, mais d'un côté justement opposé à celui où ouve cet astre. (*Voy. fig.* 9.)

est inutile, je crois, de faire ressortir l'analogie que pré-ce phénomène avec celui des canaux. Le premier suppose éflexion de rayons sur un plan vertical et ne nous trompe sur la figure des objets, mais simplement sur la direction rayons lumineux; le second se produit par une réflexion de ère sur un plan horizontal, et nous fait voir les objets au-ent qu'ils sont en réalité.

MÉTÉOROLOGIE.

... tremblement de terre qui s'est fait ressentir en Belgique, le 23 *février* 1828.

...s tremblemens de terre sont très-rares en Belgique; il en ...out au plus une dixaine dont on ait conservé le souvenir (1);

(1) Voyez page 156 du vol. précédent, une Notice de M. *Sauveur* sur les ...cipaux phénomènes météorologiques observés à Liége.

encore faut-il en compter trois qui se sont succédé en moins de cinq ans, dans le siècle dernier. On ne voit pas que ces phénomènes, qui ont eu lieu dans des circonstances très-dissemblables et à différentes époques de l'année, aient été assez sensibles pour causer des accidens. Le dernier tremblement a eu lieu en 1760, et s'est manifesté par différentes secousses qui se sont renouvelées pendant les mois de juin et de juillet; les secousses qu'on éprouva dans la nuit du 26 au 27 décembre 1755, succédèrent au tremblement de terre de Lisbonne, qui avait eu lieu le 1er novembre. *Valmont de Bomare* rapporte que les eaux thermales de Chaudfontaine acquirent de nouveaux degrés de chaleur.

Le tremblement de terre qui se manifesta le 23 février 1828, vers huit heures et un quart du matin, s'est fait particulièrement ressentir le long des bords de la Meuse, et paraît avoir eu le plus d'énergie entre Liége, Tongres, Tirlemont, Jodoigne et Huy; des murs ont été lézardés et endommagés, un grand nombre de cheminées ont été renversées, des pierres ont été détachées des voûtes de quelques bâtimens, mais sans qu'il en soit résulté aucun accident pour les individus : dans les villes voisines, telles que Maestricht, Namur, Bruxelles, etc. les secousses ont encore été très-fortes et se sont graduellement affoiblies selon les distances. Les journaux ont rapporté qu'elles se sont fait ressentir jusqu'à Bonn, Dusseldorf, Dordrecht; d'une autre part jusqu'à Flessingue, Middelbourg, Dunkerque, quoique plusieurs villes intermédiaires n'aient absolument rien éprouvé. Le phénomène a aussi été ressenti, mais faiblement, dans quelques villes de France qui sont sur la frontière, telles qu'Avesnes, Commercy, Longuion. On a également ressenti la commotion au fond des houillières qui avoisinent Liége à des profondeurs de 50 à 60 toises, et cette commotion était accompagnée d'un bruit sourd semblable au roulement d'un chariot fortement chargé. Il paraît que les secousses se sont propagées dans la direction de l'est vers l'ouest.

Le temps avait été beau les jours précédens, mais il s'était couvert la veille, et il est resté pendant plusieurs jours dans

ême état. Le baromètre qui, le 19 février, marquait à
xelles 0,^{m}7473 avait constamment baissé jusque dans la nuit
1 au 22, époque à laquelle il marquait 0,^{m}7377; dans la
qui précéda le tremblement, sa hauteur était 0,^{m}7398 et
ues instans après le phénomène, elle était 0,^{m}7425; le ba-
ètre a continué à monter ensuite assez rapidement jusqu'au
époque à laquelle il indiquait 0,^{m}7662. Le thermomètre qui,
ant la nuit du 19 indiquait encore la gelée, a graduelle-
t monté jusqu'au 27; le 23, il était à près de 4 à 5 degrés
igrades au-dessus de zéro.

'après les renseignemens communiqués de Liége, le jour du
nomène le temps était couvert et vaporeux, le baromètre
quait 27 pouces $3^{1}/_{2}$ lig. (0,^{m}7388), le thermomètre de
umur $3^{1}/_{2}$ degrés à l'ombre, et l'hygromètre de Saussure
egrés. Le baromètre avait baissé depuis le 18, où il était à
ouces $6^{1}/_{4}$ lig. (0,^{m}7450), jusqu'au 22 au soir, où il était
endu jusqu'à 27 pouces $1^{1}/_{2}$ lig. (0,^{m}7343): il paraît qu'après
ecousses, le baromètre était encore à Liége dans le même
d'abaissement, sinon plus bas. Dix baromètres différens
nous consultons avec soin, et sur l'exactitude desquels nous
ons pouvoir compter, se sont accordés à nous donner un
ltat différent; ce qui du reste peut se concilier avec ce qui
é observé à Liége.

omme on devait s'y attendre, le tremblement de terre à
é les récits les plus exagérés; quoique les secousses, à
ge même, paraissent n'avoir pas duré plus de 7 à 8 secondes,
a vu des personnes qui, montre en main, ont compté plu-
rs minutes, voire même 15, ont dit quelques journaux de
xelles. On a écrit de Tongres, que « la croix de la grande tour
été si considérablement agitée, que l'arc d'oscillation décrit
ar son extrémité, avait au moins 3 à 4 pieds de développe-
ent. » On a vu ailleurs deux rangées d'arbres qui bordaient
route, se rejoindre par les sommets, peu s'en fallut qu'un
ort ne ressuscitât dans l'église de Tongres : c'est un événement
i n'aurait certainement pas manqué d'arriver quelques siècles
us tôt.

A. Q.

Résumé des observations faites à Mastricht pendant l'an 1827, par M. Crahay professeur de physique à l'Athénée Maestricht.

Les températures sont exprimées en degrés de l'échelle c tigrade; les hauteurs du baromètre, réduites à la températu de la glace fondante et corrigées de la capillarité, sont énonc en lignes des Pays-Bas ou millimètres. La cuvette du baromè est placée à 10 ^{mèt},4770 au-dessus du zéro du pont de la Meu qui est lui-même à 42 ^{mèt}, 0358 au-dessus des moyennes ea de la mer du nord.

TEMPÉRATURE.

MOIS.	MOYENNES PAR MOIS.			
	9 heures du matin.	Midi.	3 heures du soir.	9 heures [illegible] soir.
Janvier	— 2°,58	— 0°,38	— 0°, 19	— 2°,[illegible]
Février	— 4, 54	— 1, 61	— 1, 23	— 4, [illegible]
Mars	+ 6, 70	+ 8, 59	+ 8, 74	+ 5, [illegible]
Avril	+ 11, 21	+ 13, 98	+ 15, 03	+ 10, 5[illegible]
Mai.	+ 15, 51	+ 17, 83	+ 18, 60	+ 14, [illegible]
Juin	+ 18, 13	+ 20, 77	+ 21, 90	+ 16, 5[illegible]
Juillet	+ 20, 42	+ 22, 66	+ 23, 88	+ 18, 3[illegible]
Août	+ 18, 33	+ 20, 75	+ 21, 03	+ 16, 9[illegible]
Septembre	+ 15, 59	+ 18, 97	+ 19, 85	+ 15, 4[illegible]
Octobre	+ 11, 37	+ 15, 17	+ 15, 56	+ 11, 5[illegible]
Novembre	+ 4, 30	+ 6, 12	+ 6, 24	+ 4, [illegible]
Décembre	+ 6, 48	+ 8, 06	+ 7, 86	+ 6, [illegible]
Moyennes	+ 10, 08	+ 12, 58	+ 13, 11	+ 9, 4[illegible]

MOIS.	MAXIMUM moyen PAR MOIS.	MINIMUM moyen PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE DU MAXIMUM ABSOLU.	DATE DU MINIMUM ABSOLU.	Plus grande variation en 24 heures.
Janvier. .	+ 0°,49	— 4°,59	5°,08	+ 9°, 1	— 15°, 2	24°, 3	14, à 3 h. soir.	27 au 28	11°,8 le 26
Février . .	— 0, 75	— 7, 39	6, 64	+ 10, 6	— 18, 2	28, 8	28, à 9 h. soir.	15 au 16	11 ,9 le 6
Mars . . .	+ 9, 34	+ 4, 20	5, 14	+ 13, 4	— 2, 0	15, 4	24 et 28, à midi.	19 au 20	12, 7 le 27
Avril . . .	+ 15, 27	+ 3, 24	9, 03	+ 24, 4	— 1, 0	25, 4	6, à 3 h. soir.	1 au 2	16, 6 le 29
Mai	+ 18, 80	+ 10, 70	8, 10	+ 26, 0	+ 5, 5	20, 8	31, à midi.	12 au 13	14, 2 le 18
Juin . . .	+ 22, 15	+ 11, 93	10, 22	+ 29, 0	+ 7, 3	22, 0	14, à 3 h. soir.	24 au 25	15, 8 le 13
Juillet. . .	+ 24, 09	+ 13, 57	10, 52	+ 34, 3	+ 6, 5	27, 8	30, à 2 1/2 h. soir.	12 au 13	15, 4 le 30
Août . . .	+ 21, 65	+ 12, 84	8, 81	+ 32, 0	+ 7, 6	24, 4	2, à 3 h. soir.	7 au 8	19, 1 le 2
Septembre	+ 19, 93	+ 10, 77	9, 16	+ 28, 0	+ 3, 1	24, 9	11, à 3 h. soir.	20 au 21	15, 7 le 9
Octobre. .	+ 15, 79	+ 7, 69	8, 10	+ 21, 0	— 0, 1	21, 1	10, à 3 h. soir.	28 au 29	14, 4 le 18
Novembre	+ 6, 58	+ 1, 75	4, 83	+ 11, 7	— 3, 3	15, 0	5, à midi.	28 au 29	10, 0 le 18
Décembre.	+ 8, 52	+ 4, 79	3, 73	+ 12, 4	— 2, 3	14, 7	10, à midi.	30 au 31	7, 3 le 10
MOYENNES.	+ 13°,49	+ 6°,04	7°,45	+ 21°,02	— 1°,03	22°,05			13°,74

Maximum absolu de l'année, le 30 juillet, à 2 1/2 h. du soir + 34°,3
Minimum absolu, du 15 au 16 février. . . . . . . — 18, 2

Intervalle parcouru pendant l'année. . . 52°,5

MOIS.	HAUTEURS MOYENNES DU BAROMÈTRE, PAR MOIS.				MAXIMUM absolu PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
	9 HEURES du matin.	MIDI.	3 HEURES du soir.	9 HEURES du soir.					
Janvier . .	755^{l}, 46	755^{l}, 16	754^{l}, 78	754^{l}, 59	769^{l}, 07	740^{l}, 18	28^{l}, 89	6, à midi.	11, à 3 h. soir.
Février. . .	60, 25	60, 03	59, 65	60, 21	72, 09	48, 99	23, 91	4, à midi.	21, à 3 h. soir.
Mars. . . .	52, 49	52, 45	52, 28	52, 73	69, 69	35, 27	34, 42	19, à 9 h. soir.	4, à 3 h. soir.
Avril. . . .	58, 43	58, 28	57, 81	58, 39	67, 62	44, 16	23, 46	27, à midi.	22, à 9 h. mat.
Mai	54, 05	53, 65	53, 37	53, 75	61, 96	41, 34	20, 62	22, à 9 h. mat.	24, à 9 h. soir.
Juin. . . .	57, 75	57, 41	57, 04	57, 55	65, 63	49, 33	16, 30	9 à 9 h. mat.	2, à 9 h. soir.
Juillet. . .	61, 32	61, 29	60, 89	61, 46	69, 65	53, 49	16, 16	6, à 9 h. mat.	20, à 9 h. mat.
Août. . . .	58, 07	57, 83	57, 60	57, 98	66, 68	47, 19	19, 49	29, à 9 h. soir.	15, à 9 h. mat.
Septembre.	59, 67	59, 33	58, 96	59, 18	67, 26	48, 99	18, 27	1, à 9 h. mat.	26, à 9 h. soir.
Octobre . .	54, 86	54, 39	53, 94	54, 33	67, 98	41, 60	26, 38	5, à 9 h. mat.	28, à 3 h. soir.
Novembre.	59, 11	58, 82	58, 69	59, 35	70, 89	46, 89	24, 00	27, à 9 h. mat.	29, à 3 h. soir.
Décembre .	57, 32	57, 43	57, 60	57, 88	75, 76	36, 74	39, 02	28, à 9 h. mat.	1, à 9 h. soir.
MOYENNES.	757, 40	757, 17	756, 88	757, 28	768, 76	744, 52	24, 24		

Maximum absolu de l'année, le 28 décembre, à 9 heures du matin . . . . 775^{l},76

Minimum absolu, le 4 mars, à 3 heures du soir 735, 27

Intervalle parcouru pendant l'année 40, 49

EAU TOMBÉE DU CIEL. — ÉTAT DE LA RIVIÈRE.

MOIS.	Nombre de jours de pluie, de neige ou de grêle.	Eau tombée, en pouces des Pays-Bas, ou centimètres de hauteur.	Hauteur moyenne de l'eau tombée par chaque jour de pluie, de neige ou de grêle.	HAUTEURS DE LA MEUSE EN AUNES DES PAYS-BAS OU MÈTRES. Hauteur MOYENNE par mois.	MAXIMUM absolu. PAR MOIS.	MINIMUM absolu PAR MOIS.	DIFFÉRENCE.	DATE du MAXIMUM.	DATE du MINIMUM.
Janvier	21	9p,324	0p,444	1a,49	2a,80	0a,70	2a,10	15	7 et 8
Février	14	2, 822	0, 202	0, 63	1, 20	0, 45	0, 75	28	26 et 27
Mars	25	11, 956	0, 478	3, 06	4, 00	1, 85	2, 15	19	30 et 31
Avril	17	4, 933	0, 290	1, 18	1, 90	0, 80	1, 10	1 et 2	21,22 et 23
Mai	23	8, 498	0, 369	1, 17	2, 10	0, 75	1, 35	13	du 3 au 7
Juin	17	3, 225	0, 190	0, 62	1, 00	0, 40	0, 60	1 et 2	du 24 au 30
Juillet	14	3, 616	0, 258	0, 31	0, 55	0, 20	0, 35	4	31
Août	22	9, 197	0, 418	0, 26	0, 40	0, 20	0, 20	21 et 22	du 1 ou 11
Septembre . . .	14	4, 190	0, 299	0, 20	0, 35	0, 15	0, 20	1	du 12 au 20
Octobre	16	4, 340	0, 271	0, 23	0, 60	0, 15	0, 45	30	du 12 au 15
Novembre . . .	19	5, 569	0, 293	0, 59	1, 05	0, 30	0, 75	7	29 et 30
Décembre . . .	22	6, 190	0, 281	1, 41	2, 45	0, 30	2, 15	26	1
	TOTAL.	TOTAL.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.	MOYENNE.		
	224	73, 860	0, 316	0, 93	1, 53	0, 52	1, 01		

MOIS.	NOMBRE DE JOURS DE							
	Pluie.	Grêle.	Neige.	Gelée.	Tonnerre.	Brouillard.	Ciel entièrement couvert.	Ciel [illegible]
Janvier	10	3	15	24	0	3	9	1
Février	[illegible]	0	7	26	0	7	4	3
Mars	23	5	5	8	2	1	7	0
Avril	[illegible]	1	1	2	3	0	4	2
Mai	[illegible]	1	0	0	5	2	4	0
Juin	[illegible]	[illegible]	0	0	1	4	0	0
Juillet	[illegible]	[illegible]	0	0	5	1	0	0
Août	[illegible]		[illegible]	0	5	1	0	0
Septembre	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	6	[illegible]	0
Octobre	[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	1
Novembre	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	0
Décembre	[illegible]			[illegible]		[illegible]	5	1
Total	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	8

MOIS	NOMBRE DE JOURS DES VENTS DOMINANS.							
	NORD.	NORD-EST.	EST.	SUD-EST.	SUD.	SUD-OUEST.	OUEST.	NORD-OUEST.
Janvier	8	2	1	0	4	7	9	0
Février.	6	6	5	0	2	3	6	0
Mars	3	1	0	0	2	6	17	2
Avril	6	1	2	1	1	2	15	2
Mai.	5	2	1	0	3	5	13	2
Juin.	6	2	0	0	1	7	13	1
Juillet	6	3	0	0	2	5	14	1
Août	9	2	2	0	0	6	12	0
Septembre	7	7	1	3	3	6	3	0
Octobre	0	3	2	0	8	11	6	1
Novembre.	6	4	0	0	3	6	11	0
Décembre.	2	1	0	0	5	9	14	0
TOTAUX	64	34	14	4	34	73	133	9

STATISTIQUE.

Journaux des Provinces Méridionales du Royaume.

Brabant Méridional. *Bruxelles.* La Gazette des Pays-Bas; le Courrier; le Journal de la Belgique; le Belge; la Sentinelle; l'Industriel; le Mercure; l'Argus; le Maraudeur; la Revue Bibliographique; le Bulletin Bibliographique; les Archives Philologiques; le Journal d'Agriculture; le Philanthrope; Correspondance Mathématique; l'Hygie; Bibliothéque Médicale; Gazette des Tribunaux; Jurisprudence de la Cour de Bruxelles; Jurisprudence du 19e Siècle; Annales de Jurisprudence; Thémis Belge; Journal des Notaires; la Feuille des Locataires; les Petites Affiches; Annales Universelles; Annales Maçonniques; Journal des Ménages; Journal des Modes; l'Euterpe; l'Orphée; Journal d'Apollon; *News from Home;* Catholicon; Revue Explicative; le Dimanche. 36

Louvain. Répertoire de Chimie; Journal de Louvain . . 2

Hal. Feuille d'Annonces 1

Province de Liége. *Liége.* Mathieu Laensberg; Journal de la Province; le Courrier de la Meuse; La Récompense; Bibliothéque du Jurisconsulte; Arrêts Notables; Journal de Médecine; Réimpression du Globe; Réimpression de trois Journaux catholiques; Journal Grammatical. 10

Province de Limbourg. *Maestricht.* Journal de la Province; l'Éclaireur. 2

Province du Hainaut. *Mons.* Courrier du Hainaut; Bibliothéque des Instituteurs; Revue Musicale. 3

Tournay. Le Courrier Tournaisien; Feuille de Tournay; la Pénélope 3

Flandre Orientale. *Gand.* Journal de Gand; le Catholique; *Gendschen Mercurius*; *Gendsche Gazette;* le Messager . . 5

Flandre Occidentale. *Bruges.* Gazette de Bruges; *Brugsche Courant; Brugsche Gazette;* Journal de Furnes 4

Province d'Anvers. *Anvers*. Journal de la Province; Jour- du Commerce des Pays-Bas; *Antwerps Dagblad* 3

Province de Namur. Il n'existe à notre connaissance aucun journal dans cette province.

Ainsi les provinces méridionales, sans y comprendre le duché de Luxembourg, comptent actuellement à notre connaissance 69 écrits périodiques, et le Brabant méridional seul en a 39 (1). La moitié seulement de ces écrits sont soumis au timbre. On comptait, en 1826, que le trésor avait perçu sur les journaux les valeurs suivantes, à côté desquelles nous avons mis le nombre des feuilles imprimées, en comptant, terme moyen, 2 cents pour chaque feuille indigène et le double pour chaque feuille étrangère.

	Journaux indigènes.		Journaux étrangers.	
	Timb.	Feuilles.	Timb.	Feuilles.
Brabant méridional . . fl.	20,615	1,030,750	3,550	88,750
Province de Liége	10,058	502,900	901	22,525
» de Limbourg . . .	843	42,150	142	3,550
» de Hainaut . . .	2,378	118,900	1,028	25,700
Flandre orientale	10,760	538,000	958	23,950
» occidentale . . .	1,922	96,100	652	16,300
Province d'Anvers	6,402	320,100	1,564	39,100
» de Namur	»	»	237	5,925
Total . fl.	52,978	2,648,900	9,032	225,800

Ainsi les huit provinces que nous désignons rapportent au trésor au-delà de 60,000 fl., pour le timbre des journaux, dont le nombre des feuilles s'élève à près de 3,000,000. A. Q.

(1) Nous recevrions avec reconnaissance des détails semblables aux précédens, pour les provinces septentrionales du royaume.

Mouvement de la population dans le Royaume, pendant l'année 1826.

	VILLES.		CAMPAGNES.	
	Hom.	Fem.	Hom.	Fem.
Naissances	34,825	33,090	79,078	75,002
Décès	29,510	29,389	57,057	53,096
Décès par 100 naiss.	847	888	722	708

On avait compté, pendant la même année, 48,054 mariages, et l'on estimait la population au 1er janvier à 6,116,935 âmes. Ces nombres donnent les rapports suivans :

Pour	1000 naissances masc.	949	naiss. fém.
»	1000 décès masc . .	953	décès fém.
»	10 naissances. . .	271	habitans.
»	10 décès	358	»
»	10 mariages . . .	1261	»
»	10 mariages . . .	46	naissances.

Nous lisons dans l'annuaire de M. *Lobatto*, auquel nous empruntons les nombres précédens, quelques détails relatifs à la discordance que présentent l'estimation de la population qu'il a donnée précédemment, et celle qui a été publiée par la commission de statistique. Il paraît que cette discordance tient à ce que d'un côté on n'a pas eu égard aux changemens de domicile qui ont eu lieu, et qu'on s'est borné, pour avoir l'accroissement de population dans les provinces, à ajouter aux nombres qu'on avait déjà, l'excès des naissances sur les décès. Dans les documens de M. *Lobatto*, on a eu égard aux changemens de domicile. A. Q.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Universités du Royaume.

Les Annales de l'Université de Gand, pour 1824 et 1825, renferment un Mémoire couronné de M. *Mareska*, sur la théorie des caustiques. L'auteur a commencé par présenter dans une *introduction*, l'historique des travaux des Géomètres sur les caustiques, depuis *Tschirnhausen* jusqu'à nos jours ; il a ensuite divisé son Mémoire en quatre chapitres, dont nous indiquerons sommairement le contenu. Le chapitre 1, ayant pour titre : *Reperire curvam tangentem alias curvas numero infinitas et quarum æquationes non nisi quantitate constanti inter se differunt*, est pour ainsi dire le fondement des recherches qui doivent suivre. Dans le second chapitre, M. *Mareska* s'occupe de la recherche des caustiques produites par des rayons lumineux qui passent d'un milieu dans un autre d'une densité différente ; et dans l'analise qu'il présente, il a particulièrement pris pour guide le savant rédacteur des *Annales Mathématiques* dont les travaux ont tant contribué à perfectionner tout ce qui se rattache à l'optique. Dans les deux derniers chapitres, il est traité de la caustique formée par les rayons qui traversent ou une lame à surfaces planes et parallèles, ou un corps terminé par des portions de surfaces sphériques. M. *Mareska* a coordonné avec ordre dans son travail, les nombreux matériaux que lui présentaient les géomètres modernes sur le sujet qu'il avait à traiter. De nouvelles recherches publiées depuis la composition

de son Mémoire, ont nécessité une note additionnelle sur la théorie des caustiques considérées comme les développées d'autres courbes (1). Cette partie laisse peut être à désirer sur ce qui concerne l'exactitude historique et l'esprit de la nouvelle théorie, que l'auteur ne paraît pas avoir bien saisi, au milieu des détails secondaires qu'il met sur le même plan que les principes fondamentaux; ce qui introduit de la confusion dans cette partie de son travail, que l'on verra du reste avec plaisir.

— L'université de Louvain avait proposé au coucours, la discussion de l'équation d'une courbe qu'on peut engendrer de la manière suivante :

Le sommet d'une équerre parcourt une droite donnée, un des côtés de l'équerre passe constamment par un point fixe a, *et le point mobile qui décrit la courbe demandée est sur le second côté de l'équerre, de telle manière que sa distance au sommet de l'angle droit soit toujours égale à la distance de ce même sommet au pied de la perpendiculaire, abaissée du point* a *sur la droite donnée*. M. *Tielemans*, dont le Mémoire a mérité le prix, commence par donner l'équation de la courbe qui est du quatrième degré

$$y^2 = 2ax \pm x\sqrt{x^2 - 4a^2};$$

il examine ensuite la forme de cette courbe, et la possibilité d'exprimer son équation d'une manière plus simple; pour compléter la discussion, l'auteur s'occupe aussi de la construction des normales, des tangentes, des rayons de courbure, de la quadrature, etc. Ces sortes de recherches ne peuvent être considérées que comme des exercices utiles, qui montrent que l'on a compris les principes de l'analise infinitésimale;

(1) Voyez les deux volumes précédens, qui contiennent mes premiers essais sur ce sujet, et le résumé des recherches qui ont été faites depuis par différens géomètres, et particulièrement par M. *Gergonne*. A. Q.

et sous ce rapport, M. *Tielemans* a fait preuve de savoir. Nous aurions désiré un peu plus d'élégance dans ses formules; il est bon d'éviter aussi, dans de semblables recherches, de déployer un trop grand appareil de calcul, surtout quand il s'agit de détails qui présentent un intérêt secondaire.

— M. J. J. *Ermerins* a publié, à l'occasion de sa promotion au grade de docteur dans l'Université de Leyde, une dissertation *sur la loi de la répulsion électrique*, dans laquelle il rapporte les résultats d'un grand nombre d'expériences, faites au moyen de la balance de *Coulomb*. L'auteur est amené à conclure, comme ce dernier physicien, que l'électricité décroît proportionnellement à sa densité, et que la répulsion a lieu en raison inverse du quarré des distances. Il est du reste de l'opinion déjà émise que l'attraction et la répulsion électrique ne sont pas soumises à la même loi. Le premier chapitre de ce travail donne un aperçu rapide des méthodes qui ont servi jusqu'à présent à étudier la loi de la répulsion électrique; le deuxième contient le détail des expériences par lesquelles l'auteur s'est assuré de la vérité du principe sur lequel est fondée la balance de torsion; enfin le dernier présente l'ensemble des expériences électriques entreprises par M. *Ermerins*. Ce Mémoire estimable ne peut donner qu'une idée très-favorable des connaissances et de l'adresse de l'auteur, qui, dans sa préface, parle avec modestie des difficultés qu'il a éprouvées et des secours que lui a prêtés son professeur M. P. J. *Uylenbroek*. La dissertation est dédiée à M. J. G. *Ermerins*, frère de l'auteur, qui professe avec distinction à l'Athénée de Franeker.

Jaarboekje over 1828. Annuaire pour 1828, par M. *Lobatto*; in-12, à La Haye, imprimerie de l'état 1827; prix 80 cents.

Ce petit ouvrage, qui est le troisième de la collection, a déjà été annoncé dans les deux volumes précédens de la *Correspondance*. L'auteur justifie de plus en plus l'accueil favorable que son travail a reçu particulièrement dans nos provinces septentrionales. Nous avons remarqué dans le volume qui vient de paraître, plusieurs notices intéressantes, et en-

tr'autres celle qui concerne les services rendus par les navigateurs Belges; la formule pour le calcul de la fête de Pâques, d'après le célèbre *Gauss*; les remarques sur la nouvelle unité de mesure nommée le *dyname*; une notice sur le baromètre, etc.; on trouve aussi de nouveaux documens sur le mouvement de la population dans le royaume (voyez plus haut). Il serait à désirer que ce recueil pût paraître au moins quelques mois avant le commencement de l'année à laquelle il est destiné, nous sommes persuadé qu'il n'en obtiendrait que plus de succès.

Recherches sur la Statistique physique, agricole et médicale de la province de Liége, par R. *Courtois*; tome 1; in-8, Verviers chez *Beaufays*, 1828.

Le premier volume des *recherches* sur la statistique de la province de Liége, ne nous a point paru répondre entièrement au titre que lui donne l'auteur; nous pensons que le titre de *géographie physique* aurait peut-être été plus convenable. Quoiqu'il en soit, nous avons trouvé dans ce recueil des documens intéressans, et particulièrement sur la partie géologique et sur ce qui concerne les eaux thermales, dont l'auteur a donné les analises d'après MM. *La Fontaine* aîné, et *Delvaux*, professeur à l'Université. On lira surtout avec fruit les renseignemens donnés sur les eaux thermales et minérales de Spa et de Chaufontaine, qui jouissent d'une juste célébrité. Dans la section qui traite de la météorologie, on trouve le catalogue que M. *Sauveur* a inséré dans le volume précédent de la *Correspondance*; M. *Courtois* y a ajouté des observations thermométriques et barométriques, mais cette dernière partie laisse à désirer. On n'y présente que les moyennes des termes *maxima* et *minima*, et encore pour des périodes assez éloignées. Voici du reste les valeurs des termes extrêmes.

baromètre	0,778	max. le 25 février. .	1808
»	0,704	minim. le 22 mars .	1751
thermomètre	37 deg. cent.	max. le 30 août.	1783
»	— 24 »	minim. le 17 fév.	1827

L'ouvrage de M. *Courtois*, que nous ne connaissons du reste que par le premier volume, n'est pas tout-à-fait ce qu'il devrait être; cependant il mérite d'être consulté par les personnes qui désirent connaître la province de Liége.

Essai de Physique Élémentaire, ou premières notions de physique, par M. F. *Rouveroy*; in-18. Liège chez *Latour*, 1828.

Le petit ouvrage que nous annonçons, traite sommairement des différentes branches de la physique, de manière à les mettre à la portée de l'enseignement inférieur; il nous a paru que le style était généralement ce qu'il doit être dans ces sortes d'ouvrages, c'est-à-dire, simple et clair; on pourrait cependant trouver à reprendre des expressions impropres et des définitions peu exactes: l'auteur dit par exemple, en parlant *du centre de gravité*, que c'est le centre de la pesanteur d'un corps; et en parlant de la *tangente*, c'est la ligne droite qui touche un cercle, mais sans paraître en sortir. On lit encore : la terre, de même que tout ce qui est circulaire, est divisée en 360 parties ou degrés. Il nous a paru aussi que l'auteur ne s'est pas assez attaché à mettre de l'ordre dans la distribution des matières dont il traite. Les deux dernières leçons renferment des notions sur notre globe et sur notre univers. Nous ne ferons point de querelle à l'auteur sur ce qu'il dit des crépuscules dans les régions voisines du pôle, ni sur la distance de la lune à la terre, qu'il fait deux fois trop grande (60 diamètres de la terre au lieu de 60 rayons), ni sur la distance des étoiles qu'il fait de plus de 30 milliards de lieues au lieu de plus de 3000 milliards de lieues au moins; nous aimons mieux lui tenir compte de ce que son ouvrage renferme de bon et des intentions qui l'ont fait naître. M. *Rouveroy* est honorablement connu par plusieurs ouvrages utiles, et l'*Essai de physique*, malgré les observations que nous avons cru devoir faire, est de nature à faire aimer la science dont il traite.

Élémens de Géographie à l'usage des écoles primaires, par M. P. J. *Prinsen*, traduit par M. Ch. *Meerts*; in-18, Amsterdam, chez *Vanderhey* et fils, 1828.

Grondbeginselen der Rekenkunde, principes d'arithmétique; in-18, à Leyde, chez J. C. *Cyfveer*, 1827.

On sait que la Hollande est un des pays où l'instruction des écoles primaires est le mieux soignée; et cet avancement peut tenir au soin avec lequel on rédige les ouvrages destinés à être mis entre les mains des enfans. La théorie est toujours développée par de nombreux exemples, mais ces développemens dégénèrent quelquefois en prolixité. *Les Élémens de Géographie* de M. *Prinsen* ne présentent point cet inconvénient; nous y avons trouvé au contraire beaucoup de précision et de clarté; mais nous avons remarqué d'une autre part quelques inexactitudes et plusieurs omissions que l'auteur, qui semble peu connaître nos provinces méridionales, aurait pu faire disparaître par les soins de M. *Meerts*. En parlant d'Audenaerde, l'auteur dit que les habitans s'occupent principalement de la fabrication des tapis, cette fabrication a cessé d'exister depuis bien long-temps; il fait la population de Gand de 56,000 habitans, elle est de plus de 70,000, il omet de parler de l'Université, de la Bibliothéque publique qui est considérable, du Jardin des plantes, de l'Académie Royale de Dessin, etc.; pour Bruxelles, on trouve des omissions semblables qu'il devenait d'autant plus urgent de faire disparaître, que la face de cette ville est complétement changée depuis dix ans. Le traducteur a du reste relevé dans ses notes plusieurs inexactitudes. Le second traité à moins de précision que celui de M. *Prinsen*, mais il mérite cependant d'être mis entre les mains des enfans. Les exemples qu'il présente sont nombreux et choisis de manière à piquer la curiosité; ce qui est un mérite essentiel dans un ouvrage élémentaire.

Mémoire sur la sphère, par M. *** (*Extrait des Mémoires de la société des sciences de Lille*) 1826.

Ce Mémoire renferme un grand nombre de théorèmes curieux, dont plusieurs paraissent appartenir à l'auteur. Nous aurions désiré pouvoir en présenter au moins les énoncés, mais les limites dans lesquelles nous devons nous renfermer s'y opposent. Nous pourrons donner du reste une idée

u travail de l'auteur, en citant ses propres paroles : « Je e suis proposé, dit-il, de résoudre plusieurs problèmes sur sphère, au moyen de constructions faites sur la surface de e corps, à l'aide du compas, et par des procédés semblables ceux qu'on emploie dans les constructions planes. Les promes ordinaires fournissent le plus souvent des problèmes alogues, si l'on remplace les lignes droites par des arcs grand cercle, qui sont, sur la sphère, les lignes *directes* les *moindres lignes*; etc. »

Observation. Nous regrettions, dans le numéro précédent, e M. *Pagani* n'eût pas terminé le *Résumé des leçons sur Géométrie et la mécanique des Arts Industriels*, dont il ait commencé la publication. M. *Pagani* nous a dit depuis e son ouvrage était terminé; nous nous fesons en conséence un plaisir de rectifier ce que nous avons annoncé écédemment. C'est depuis peu de jours seulement que, malé le peu de distance qui nous sépare de Louvain, nous ons réussi à nous procurer la fin de la géométrie de M. *Pani*, qui traite des figures rectilignes, des proportions et l'extraction des racines quarrées, des lignes et des figures oportionnelles, de la ligne droite et du plan, des solides et tout ce qui concerne leur mesure, ainsi que des notions éliminaires sur les sections du cône.

Nouvelles Scientifiques.

Nous devons à l'obligeance de M. le capitaine *Sabine* quelues renseignemens sur une expédition scientifique qui doit voir lieu sous les ordres du capitaine *Foster*. Parmi les bservations qui seront faites, celles du pendule doivent occuper premier rang (1). Le capitaine sera muni de deux pendules

(1) M. le capitaine Sabine a la complaisance d'observer actuellement à Londres les oscillations d'un pendule construit aux frais de notre gouvernement, et destiné à l'observatoire de Bruxelles. Les observations qui seront faites ici seront comparées à celles de ce savant, et à celles que M. Moll se ispose à faire dans nos provinces septentrionales. A. Q.

invariables, qu'il est chargé d'observer dans 26 stations, dont trois seulement sont dans les latitudes moyennes de notre hémisphère, et toutes les autres sont ou bien voisines de l'équateur ou dans l'hémisphère austral. On veut par-là former, autant que possible, trois zones de stations : L'une équatoriale et comprise entre 10° B et 10° A ; une seconde dans les latitudes moyennes australes entre 10° et 50°; et une troisième sous le 50° degré et au delà. Voici les stations dans l'ordre où elles doivent être visitées :

1828. Les îles du Cap Vert; l'île Sainte-Catherine (Brésil); Monte-Video; l'entrée orientale du détroit de Magellan; l'île des États.

1829. Nouvelle-Schetland; Cap de Bonne-Espérance; Pata, côté orientale d'Afrique sous l'équateur; les îles Maldives; Pointe de Galles (Ceylan); Singapore; Cap Leeuwin (Nouvelle Galles méridionale).

1830. Les îles Aukland; Hobarts-Town (Vandiemen); Otaheiti; île de Noël; Owhyhee; Lima.

1831. Cap Saint-François; Acapuléo; Valdivia; Valparaiso; l'entrée occidentale du détroit de Magellan.

1832. Le milieu du détroit de Magellan; Fernando de Noronha; Para; Cayenne.

Outre les observations du pendule, M. *Foster* est chargé de diriger son attention vers les sujets suivans : les longitudes des stations et de quelques points intermédiaires par la méthode suivie dans le voyage du capitaine *Sabine*, c'est-à-dire par des observations astronomiques liées entr'elles au moyen de plusieurs chronomètres; les phénomènes du magnétisme terrestre; la comète d'Encke au sud Shetland, janvier 1829; les observations météorologiques de toute espèce, surtout de l'intensité relative du rayonnement solaire sous différens parallèles, et à des élévations diverses, et de la loi du décroissement de l'élasticité de la vapeur dans l'atmosphère, à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface du globe.

Nous avons appris, depuis, que cette expédition formera l'objet de deux voyages, qui seront exécutés successivement par le

capitaine *Foster*. Le premier comprendra toutes les stations atlantiques désignées plus haut (au nombre desquelles est la Nouvelle-Shetland et de plus Sainte-Hélène, Meranham, Trinidad et Porto-Bello. A son retour, M. *Foster* recevra un vaisseau plus grand pour exécuter le reste du plan primitif, tel que la société royale l'a arrêté, et que l'amirauté s'est engagée à le faire exécuter).

— La société royale de Londres vient de demander au gouvernement de faire les frais de la réduction et de la publication d'un catalogue de 10,000 étoiles, observées avec un cercle mural à Paramatta dans la Nouvelle-Galles méridionale, sous la direction de sir Th. *Brisbane*, et des lieux vrais de toutes les planètes depuis 1816, déduits des observations de Greenwich.

— Les nouveaux essais de M. *Barlow*, pour produire l'achromatisme au moyen d'un liquide, continuent à obtenir les plus heureux résultats. Ce célèbre physicien avait construit par son procédé, des lunettes de 4 à 5 pouces d'ouverture que nous avons eu occasion de voir chez M. *South*, à l'observatoire de *Kensington*, et qui semblent pouvoir remplacer les instrumens de même grandeur construits par les procédés ordinaires. Nous venons d'apprendre de M. *Barlow*, qu'il s'occupe en ce moment de lunettes d'une dimension beaucoup plus grande; et plusieurs savans, parmi lesquels nous aimons à citer l'honorable M. *South*, conçoivent l'espoir de voir construire des instrumens qui pourront égaler, sinon surpasser en ouverture, ceux qui ont été construits jusqu'à présent en France et en Allemagne.

— Le 21 mars dernier, vers 3 heures de l'après-midi, le baromètre marquait à Bruxelles $0^m,3872$ et se trouvait conséquemment plus bas que le 22 du mois précédent. Le mercure ne se maintint que quelques instans dans cet état. L'atmosphère était vivement agitée et traversée par de sombres usages; le lendemain, vers 9 heures $^1/_2$ du matin, quelques secousses ont été ressenties dans les environs de Wavre: il paraît qu'on en a éprouvé encore dans quelques autres endroits. Des éboulemens

de terre qui ont eu lieu le 27 mars, sur une partie du *Kerselaarberg*, montagne située dans les environs d'Audenarde, avaient fait croire un peu légèrement que cet accident était une suite des tremblemens de terre éprouvés depuis peu.

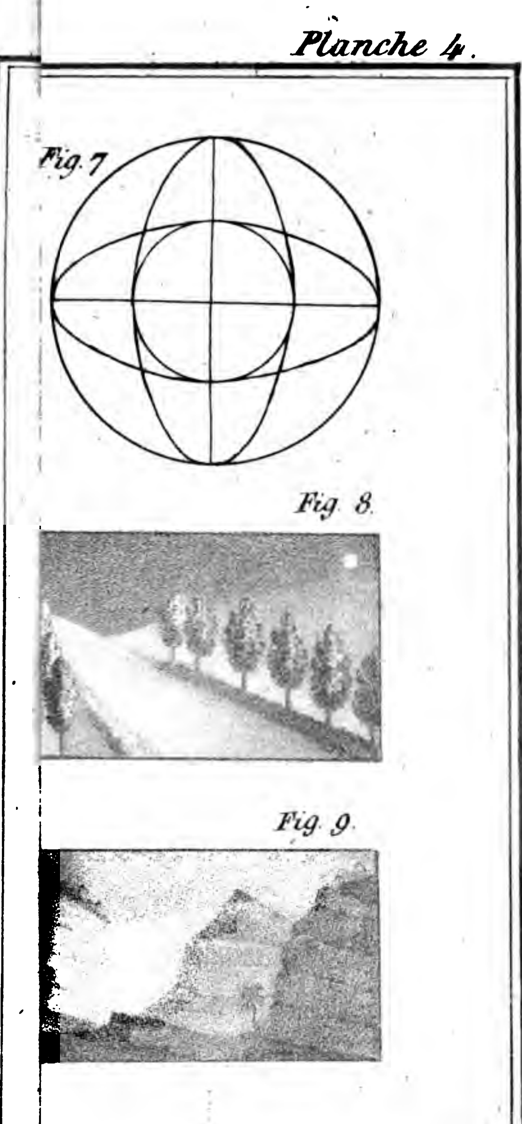
— Nous devons à l'obligeance de M. *Sauveur*, l'extrait suivant d'un ancien manuscrit, conservé à Glons, province de Liége; il peut faire suite au catalogue sur les tremblemens de terre, donné dans le volume précédent. « L'an 1692, le roi très-chrétien prit Namur... le tout puissant augmenta nos alarmes par des tremblemens de terre, plus violens et plus fréquens qu'on n'en a jamais éprouvés. Le premier, qui fut aussi le plus considérable, se fit ressentir le 18 septembre 1692, vers 2 heures 1/2 de l'après-midi; il dura environ 2'. Tout les pays dont nous recevons des nouvelles l'ont éprouvé; un grand mouvement dans l'air le précédait et l'accompagnait; tout le monde pensait périr. Les cheminées tombaient, les murs se fendaient, et ceux qui n'étaient pas bien solides s'écroulaient. La tour de notre église (de Glons), se fendit et plusieurs pierres tombèrent dans sa partie intérieure; celle de Boira fut encore plus maltraitée. Deux heures après, nous éprouvames un second tremblement, mais qui fut moins violent. Un troisième semblable à celui-ci se fit sentir deux jours après... on observa encore plusieurs autres secousses, mais moins fortes; cependant celle du 18 octobre à 5 heures 3/4 du matin fut assez considérable. »

QUESTIONS.

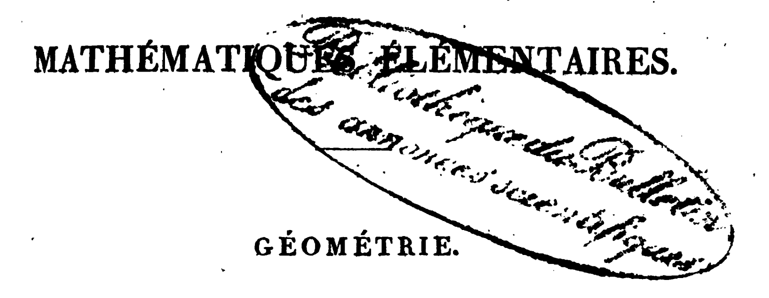
I. Une boîte de forme cubique renferme un liquide. On demande la surface à laquelle le niveau du liquide est tangent dans toutes les positions que peut prendre la boite. On pourra rendre la solution applicable à une boite de forme quelconque.

II. Étant donnée une courbe fermée, déterminer, 1° un point tel que la somme de ses distances à tous les points de cette courbe soit un *minimum*; 2° un point tel que la somme de ses distances à tous les points de la courbe soit un *maximum*. On exige que ce dernier point soit sans l'intérieur de la courbe.

Planche 4.



Lith



MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Solutions de la question proposée à la page 148 de ce volume, par :

M. W. H. Cost Jordens, juge de paix à Deventer;
M. Th. Olivier, ancien élève de l'école polytechnique;
M. Goethals, candidat en sciences à l'université de Gand;
M. Rammelman-Elsevier;
M. Storm van S' Gravesande (1);
M. Vollenhoven, cadet à l'école militaire de Delft (2);
M. Eug. Gaussoin, élève à l'Athénée royal de Bruxelles;
M. E. H...., étudiant en droit à l'Université de Liége.

L'aire de tout triangle est égale au carré de la somme des racines carrées des aires des triangles formés en menant, par des points pris à volonté sur un côté, des parallèles aux deux autres. De plus, chaque parallélogramme résultant, vaut la dou-

(1) Nous devons à l'obligeance de M. *Pilaar*, lieutenant de vaisseau, les solutions de MM. *Rammelman-Elsevier* et *Storm van 's Gravesande* ses élèves.

(2) En nous adressant la solution de M. *Vollenhoven*, M. *Lobatto* observe que, *si par un point D pris dans l'intérieur d'un triangle, on mène les trois parallèles à chacun des côtés, on formera trois parallélogrammes et trois triangles; désignant les aires de ceux-ci par P, Q, R, et celle du triangle par I, l'on aura*

$$I=[\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}]^2.$$

ble racine carrée du produit des aires des deux triangles, qui ont un côté commun avec lui.

Nous observons, qu'en menant par des points pris sur un côté d'un triangle, des parallèles aux deux autres côtés, ce triangle est divisé en un nombre de triangles égal au nombre de points qu'on a pris, plus un; et que le reste se compose de parallélogrammes dont le nombre est égal à la somme de la série des nombres naturels, dont on prend autant de termes, qu'on a de points sur le côté du triangle : ainsi en prenant

1	point l'on a	2	triangles	+	1	parallélogramme;
2	—	3	—	+	3	—
3	—	4	—	+	6	—
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	—	$n+1$	—	+	$\frac{n(n+1)}{2}$	—

De plus, nommant les triangles résultans, α, β, γ, etc., comme dans la figure ci-jointe, et les parallélogrammes a, b, c, d, etc., on aura pour les valeurs des triangles ABC, AFG, etc., (*fig.* 1, *pl.* V).

$$\alpha+\beta+a$$
$$\alpha+\beta+\gamma+a+b+c$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+a+b+c+d+e+f, \text{ etc.}$$

Prenons maintenant dans le triangle ABC sur AB le point D, et menons les parallèles DE et DH. Considérant que les parallélogrammes de même hauteur sont comme leurs bases, nous aurons :

$$a : 2\beta = CH : BH = DE : BH$$

et $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = DE : BH$

donc $a : 2\beta = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$

d'où $a = 2\sqrt{\alpha\beta}$

L'aire du triangle ABC est donc

$$= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = [\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}]^2$$

Prenant dans le triangle AFG deux points D et B, et menant les lignes parallèles, nous aurons de même

$$b : 2\gamma = \text{LI} : \text{FL} = \text{BH} : \text{FL}$$

$$\sqrt{\beta} : \sqrt{\gamma} = \text{BH} : \text{FL}$$

d'où $$b : 2\gamma = \sqrt{\beta} : \sqrt{\gamma}$$

et $$b = 2\sqrt{\beta\gamma}$$

$$c : b = \text{GI} : \text{IL} = \text{DE} : \text{BH}$$

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = \text{DE} : \text{BH}$$

donc $$c : b = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}$$

et $$c = b\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = 2\sqrt{\alpha\gamma}$$

L'aire du triangle AGF est donc

$$= \alpha + \beta + \gamma + 2\sqrt{\alpha\beta} + 2\sqrt{\beta\gamma} + 2\sqrt{\alpha\gamma} = [\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}]^2$$

de cette manière, l'aire du triangle AMN dans lequel on a pris trois points D, B et F sera

$$= [\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}]^2$$

et ainsi de suite.

L'on voit aussi que chaque parallélogramme résultant vaut la double racine carrée du produit des aires des deux triangles qui ont chacun un côté commun ou égal avec lui.

En général donc, si l'on divise un côté d'un triangle A en $n-1$ points et que l'on mène de ces points des parallèles aux deux autres côtés, le triangle sera divisé en n triangles et $\frac{n(n-1)}{2}$ parallélogrammes.

Autre Solution.

Par le sommet d'un triangle quelconque AMN, je mène une droite (1), parallèle à la base NA, que je désigne par (n) (*fig.* 1, *pl.* V), je mène ensuite $(n-2)$ parallèles à la base (n), comprises entre les deux droites (1) et (n) et arbitrairement distantes entre elles.

Sur deux parallèles voisines (1) et (2), (2) et (3), etc., $(n-1)$ et (n), je construis de petits triangles semblables au triangle AMN, et tels que le triangle Δ' construit sur (1) et (2) aura son sommet situé sur (1) et sa base sur (2), et de même pour les petits triangles suivans Δ'', Δ''', etc., $\Delta^{(n-1)}$.

Je désigne par b' la base, et par h' la hauteur du triangle t'; par b'' la base, et par h'' la hauteur du triangle t''; généralement, par $b^{(n-1)}$ la base et par $h^{(n-1)}$ la hauteur du triangle $t^{(n-1)}$.

Je désigne par B la base, et par H la hauteur du triangle AMN, et je désigne ce triangle par T.

Cela posé l'on a :

$$\mathrm{H} = h' + h'' + h''' + \ldots . + h^{(n-1)}.$$

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{B.H}}{2} = \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{H}} . \mathrm{H}^2 = \frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{H}} [h' + h'' + h''' + \ldots . + h^{(n-1)}]^2 =$$

$$= \left[h' \sqrt{\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{H}}} + h'' \sqrt{\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{H}}} + \ldots . + h^{(n-1)} \sqrt{\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{H}}} \right]^2$$

mais comme l'on a en vertu de la similitude des triangles :

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}} = \frac{b'}{h'} = \frac{b''}{h''} = \frac{b'''}{h'''} = \ldots . = \frac{b^{(n-1)}}{h^{(n-1)}}.$$

l'on aura

$$T=\left[h'\sqrt{\frac{b'}{2h'}}+h''\sqrt{\frac{b''}{2h''}}+\ldots+h^{(n-1)}\sqrt{\frac{b^{(n-1)}}{2h^{(n-1)}}}\right]^2=$$

$$=\left[\sqrt{\frac{b'h'}{2}}+\sqrt{\frac{b''h''}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{b^{(n-1)}h^{(n-1)}}{2}}\right]^2$$

et enfin

$$T=[\sqrt{t'}+\sqrt{t''}+\sqrt{t'''}+\ldots+\sqrt{t^{(n-1)}}]^2.$$

Extrait d'une lettre de M. VERDAM, lecteur à l'Université de Groningue.

Avant de connaître la solution du problème donnée à la page 4 de ce volume de la *Correspondance*, par M. le professeur *Noël*, j'avais déjà résolu ce problème de mon côté ; trouvant quelque chose de particulier dans ma solution, je pris le parti de vous l'adresser, dans le seul but de faire voir la différence de résultat auquel on peut être conduit en envisageant une question d'une autre manière, etc.

Soit a la longueur d'un des côtés de la base AB d'une pyramide tronquée (*fig.* 2) ; b le côté correspondant CD du plan supérieur; x le côté EF de la section demandée; les aires des bases et de la section pourront être réprésentées par na^2, nb^2, nx^2. Si H représente la hauteur de la pyramide, ayant pour base na^2, les hauteurs des pyramides, dont les bases sont les plans $CD=nb^2$, et $EF=nx^2$, seront respectivement $\frac{bH}{a}$ et $\frac{Hx}{a}$; de là on déduira les solidités de ces pyramides, et en les soustrayant, on trouvera :

solidité de la partie tronquée

$$BAE=\frac{1}{3}nH\left(\frac{a^3-x^3}{a}\right);$$

solidité de la partie tronquée

$$\text{FED} = \frac{1}{3} n\text{H}\left(\frac{x^3 - b^3}{a}\right).$$

Si BAE est à FED comme 1 : m, on trouvera par substitution, l'équation

$$\frac{1}{3} n\text{H}.m\left(\frac{a^3 - x^3}{a}\right) = \frac{1}{3} n\text{H}. \frac{(x^3 - b^3)}{a};$$

d'où il suit :

$$x = \sqrt[3]{\frac{ma^3 + b^3}{m + 1}};$$

Ayant résolu cette équation, on fera Af = la valeur de x, et, en tirant fF parallèle à AD (ce qui peut toujours se faire aisément, quelque grand ou petit que soit le tronc de pyramide), on aura d'abord la position du côté EF, par lequel le plan coupant doit passer parallélement aux deux bases AB et CD.

Cette solution montre que : 1° la solution de la question dépend de la duplication du cube, comme on devait s'y attendre *à priori*. Comme l'on peut trouver graphiquement, et assez exactement, deux moyennes proportionnelles entre deux lignes, la construction de l'équation finale est fort facile; car on n'a qu'à prendre le côté a, m fois, y ajouter le côté d'un parallélipipède, dont la section verticale soit a^2 et la solidité b^3, nommant ce côté c, on aura un parallélipipède de la longueur $ma + c$, et dont la largueur et la hauteur seront a et a; prenant la $(m + 1)^{\text{ième}}$ partie de longueur $ma + c$, on aura aussi la $(m + 1)^{\text{ième}}$ partie de ce parallélipipède; et ayant changé ce nouveau parallélipipède en un cube, le côté de ce cube sera la valeur de x.

2° Si le tronc doit être coupé en deux parties équivalentes,

on aura $m = 1$, et $x^3 = \frac{1}{2}(a^3 + b^3)$, ce qui est évident d'ailleurs.

3° Pour la pyramide entière, on a $b = o$, et $x = a\sqrt[3]{\frac{m}{m+1}}$.

4° La conséquence la plus remarquable, à laquelle conduit la valeur de x, c'est que cette valeur ne dépendant ni de la hauteur du tronc, ni du nombre des côtés, elle aura toujours lieu quand deux côtés homologues des bases seront respectivement $= a$ et $= b$, donc :

a. Tous les troncs de pyramide qui auront même hauteur, et deux côtés homologues des bases, égaux à a *et à* b, *seront coupés par le même plan parallèle aux bases, en même raison, quoique l'une des bases soit triangulaire, l'autre quarrée ou polygone;*

b. La même chose a lieu pour des pyramides entières, et pour des cônes ou des troncs de cônes, dont les bases auront même diamètre ;

c. Si plusieurs pyramides, de hauteur inégale, doivent être coupées en même raison, la longueur d'un côté des sections, sera pour toutes la même, si le côté homologue des bases est de même longueur dans toutes les pyramides ;

d. La même chose aura lieu pour les cônes de même base et de hauteurs différentes ;

e. Les troncs de pyramides, qui auront respectivement deux côtés homologues $= a$ et b, *ou les troncs de cônes, dont les bases auront les diamètres* a et b, *jouiront de la même propriété, sous des hauteurs différentes.*

Quant aux cônes tronqués, en nommant a et b les diamètres des bases, x le diamètre de la section demandée, on aura aussi

$$x = \sqrt[3]{\frac{ma^3 + b^3}{m + 1}}$$

5° Il existe une analogie parfaite entre la manière de partager les corps précédens en parties proportionnelles, et entre la divi-

sion des trapèzes et des triangles en raison donnée, parce que, en nommant a et b les bases d'un trapèze, x la longueur de la parallèle coupante, on aura

$$x=\sqrt{\frac{ma^2+b^2}{m+1}}$$

Ainsi les propriétés mentionnées auront aussi lieu pour les trapèzes et les triangles.

6° Si A et A′ représentent les aires des bases de la pyramide ou du cône tronqué, et que x soit l'aire de la section demandée, on aura

$$x=\sqrt[3]{\left[\frac{mA\sqrt{A}+A'\sqrt{A'}}{m+1}\right]^2}.$$

On veut construire un vase cylindrique d'argent fin, à base elliptique, et surmonté d'un couvercle dont l'intérieur soit égal au demi-ellipsoïde de révolution de la base intérieure autour de son grand axe. La capacité intérieure, tant du vase que du couvercle, doit être de quatre litrons, et l'épaisseur doit avoir une ligne partout. Comme on désire ménager autant qu'il se pourra la matière, on demande quelles devront être les dimensions du vase à construire, pour que la quantité d'argent employé soit un minimum; *quelle sera alors la capacité du vase, sans le couvercle, et pour combien de florins sera-t-il entré d'argent fin dans la construction? (On admet que le kilogramme d'argent pur, vaut 222 francs, et que sa pesanteur spécifique est 10,5).* Question énoncée à la page 268 du tome III de la *Correspondance Mathématique* et résolue par J. N. Noël, principal de l'Athénée de Luxembourg.

Soient $2x$ et $2y$ les valeurs en lignes des axes de la base intérieure du vase demandé, $2x$ étant le grand axe, et soit z lignes la hauteur intérieure du même vase; l'aire de l'ellipse intérieure

sera donc πxy lignes carrées, et la capacité du vase, sans le couvercle, sera πxyz lignes cubes. Le volume de l'ellipsoïde décrit par la demi-ellipse intérieure autour de son grand axe $2x$, a pour mesure $\frac{4}{3}\pi xy^2$ (voyez mes *Mélanges de Mathématiques*, page 214); donc la capacité du couvercle est $\frac{2}{3}\pi xy^2$ lignes cubes. Mais la capacité intérieure, tant du vase que du couvercle, doit être de 4 litrons, c'est-à-dire de 4000000 lignes cubes. Ainsi en posant, pour abréger, $a\pi = 4000000$, on aura

$$\pi xyz + \frac{2}{3}\pi xy^2 = a\pi, \quad \text{ou} \quad xyz + \frac{2}{3}xy^2 = a \;\ldots.\; (1)$$

Puisque le vase doit avoir partout une ligne d'épaisseur, il est clair que sa hauteur sera $z + 1$ et que les axes de la base extérieure seront $2(x+1)$ et $2(y+1)$. Donc les volumes respectifs du vase et du couvercle, considérés extérieurement, sont $\pi(x+1)(y+1)(z+1)$ et $\frac{2}{3}\pi(x+1)(y+1)^2$. Otant de la somme de ces volumes, celle $a\pi$ des volumes intérieurs, le reste sera le volume de l'argent fin employé à la construction du vase et du couvercle cherchés. Ainsi en désignant ce volume par $m\pi$, il viendra, reduction faite,

$$(x+1)(y+1)(z+1) + \frac{2}{3}(x+1)(y+1)^2 - a = m \;\ldots.\; (2)$$

Cette équation peut s'écrire comme il suit: $(xy + x + y + 1)\left(z + \frac{2}{3}y + \frac{5}{3}\right) - a = m$. Si l'on y substitue la valeur z, tirée de l'équation (1), et qu'on chasse les dénominateurs, on aura, en réduisant,

$$3ax + 3ay + 3a + 5x^2y^2 + 5x^2y + 5xy^2 + 5xy = 3mxy \;\ldots\; (3)$$

Résolvant cette équation par rapport à x, on trouvera

$$x = \frac{3my - 3a}{10y^2 + 10y} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3my - 3a}{10y^2 + 10y} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3a}{5y}}.$$

Par cette formule, on voit que si y a la valeur qui convient au *minimum* de m, et conséquemment au *minimum* de $m\pi$, ce *minimum* rendra nulle la quantité sous le radical (*), et donnera

$$\frac{3my - 3a}{10y^2 + 10y} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3a}{5y}},\ x = \sqrt{\frac{3a}{5y}} \text{ et } 5x^2y = 3a.$$

Résolvant l'équation (3) par rapport à y, on verra semblablement que le *minimum* de $m\pi$ donne $5xy^2 = 3a$. Combinant cette équation avec l'équation (1) et $5x^2y = 3a$, on en conclura que la plus petite valeur de $m\pi$ répond à

$$x = y = z = \sqrt[3]{\frac{3a}{5}}.$$

Ainsi pour que le volume de l'argent employé soit un *minimum*, il faut : 1° que le vase soit un cylindre ayant sa hauteur égale au rayon du cercle qui lui sert de base; 2° que le couvercle soit une demi-sphère de même rayon que la base du cylindre.

Maintenant, pour calculer la valeur numérique de ce rayon, on observe que $a\pi = 4000000$, et que par suite

$$\frac{3a}{5} = \frac{2400000}{\pi} = \frac{2400000}{3,14159} = 763944;$$

d'où

$$\sqrt[3]{\frac{3a}{5}} = \sqrt[3]{763944} = 91 \text{ lignes et } \frac{4}{10}.$$

(*) Pour les *maximums* et les *minimums* du second degré, voyez les *Mélanges de Mathématiques* ou les *Mélanges d'Algèbre*.

Il est clair d'ailleurs que les valeurs qui correspondent au *minimum* de $m\pi$, réduisent la capacité du vase, sans le couvercle, à πx^3; cette capacité est de 2400000 lignes cubes, ou 2 litrons $\frac{4}{10}$.

D'un autre côté, l'équation (2) fournit, pour le *minimum* du volume $m\pi$ de l'argent employé,

$$m\pi = 5\pi x(x+1) + \frac{5}{3}\pi.$$

Substituant la valeur précédente de x et celle de π, puis effectuant les opérations, on verra que le *minimum* de l'argent employé est 132682 lignes cubes, environ.

Le kilogramme de l'argent employé vaut 222 fr. ou 189 fl. $\times \frac{222}{400} =$ 189 fl. $\times \frac{111}{200}$. Mais le kilogramme est le poids d'un palme cube ou de 1000000 de lignes cubes d'eau distillée; donc, puisque la pesanteur spécifique de l'argent du vase est 10,5, il s'ensuit que 1000000 de lignes cubes de cet argent pèsent 10 kilogrammes 5 dixièmes, et valent par conséquent 189 fl. $\times \frac{111}{200} \times \frac{105}{10}$ ou 1101 fl.,3975; les 132682 lignes cubes valent donc 0 fl., 0011013975 $\times$ 132682 $=$ 146 fl. 13 cents $\frac{1}{2}$, environ. Ainsi, dans la construction du vase et de son couvercle, il entrera pour 146 fl. 13 cents $\frac{1}{2}$ d'argent fin. Ce qui complète la solution du problème proposé.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Détermination des axes principaux dans les lignes et les surfaces du second ordre, rapportées à des axes obliques; par M. Bobillier, professeur à l'école des arts et métiers de Châlons.

Considérons d'abord une ligne du second ordre rapportée à deux de ses diamètres inclinés d'un angle θ et donnée par l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy - 1 = 0;$$

l'équation d'un cercle concentrique d'un rayon variable $\sqrt{u}$ sera

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos.\theta - u = 0,$$

Et par conséquent, en appelant ρ une indéterminée, la suivante

$$\rho(Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy - 1) + x^2 + y^2 + 2xy \cos.\theta - u = 0$$

pourra représenter toutes les lignes du second ordre qui contiennent les quatre points d'intersection des deux premières; or, si l'on profite de l'indétermination de ρ pour rendre cette équation homogène, ce que l'on peut faire en posant $\rho + u = 0$ d'où $\rho = -u$, la ligne correspondante se réduira à un système de deux droites; substituant donc, ce système sera exprimé par

$$(Au - 1)x^2 + (A'u - 1)y^2 + 2(Bu - \cos.\theta)xy = 0; \quad (1)$$

il est visible maintenant que lorsque le rayon du cercle sera égal à l'un des demi-axes principaux de la proposée, les deux droites se confondront avec l'un ou l'autre de ces mêmes axes; la réciproque a évidemment lieu; mais pour que cette dernière équation appartienne à une droite unique, il faut que son premier membre soit un carré parfait c'est-à-dire que

$$(Bu-\cos.\theta)^2-(Au-1)(A'u-1)=o,$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à u,

$$(B^2-AA')u^2+(A+A'-2B\cos.\theta)u-\sin.^2\theta=o; \quad (2)$$

telle est donc l'équation qui fait connaître les carrés des demi-axes principaux. Lorsque $A+A'=2B\cos\theta$, ces carrés sont égaux et de signe différent et par suite la courbe est une hyperbole équilatère.

L'équation (1), en vertu de ce qui précède, devient

$$(Au-1)x+(Bu-\cos.\theta)y=o;$$

en y remplaçant u tour à tour par les valeurs m^2 et n^2, tirées de (2), on a pour les équations des axes

$$(Am^2-1)x+(Bm^2-\cos.\theta)y=o,\ (An^2-1)x+(Bn^2-\cos.\theta)y=o$$

et pour celle de leur système

$$[(Am^2-1)x+(Bm^2-\cos.\theta)y]\,[(An^2-1)x+(Bn^2-\cos.\theta)y]=o;$$

effectuant les calculs et observant que

$$m^2+n^2=\frac{2B\cos.\theta-A-A'}{B^2-AA'},\ m^2n^2=-\frac{\sin.^2\theta}{B^2-AA'},$$

elle prend cette forme

$$[A^2\cos.^2\theta-2AB\cos.\theta+B^2]\,x^2+(A-A')(A\cos.\theta-B)\,xy-$$
$$[AA'\cos.^2\theta-B(A+A')\cos.\theta+B^2]\,y^2=o; \quad (3)$$

Si l'on représente un instant par R, S, T les coefficiens de x^2, xy, y^2, on s'assurera aisément qu'ils sont liés par la relation $R+T-S\cos.\theta=o$, ce qui signifie que les axes principaux sont rectangulaires.

Lorsque les diamètres connus se coupent à angle droit, l'on a $\sin.\theta=1$, $\cos.\theta=o$ et les équations (2) et (3) deviennent

$$(B^2-AA')u^2+(A+A')u-1=o \quad (4)$$
$$Bx^2-(A-A')xy-By^2=o,$$

on pourra en conséquence déterminer les axes en grandeur et en direction au moyen des formules;

$$u=\frac{-(A+A')\pm\sqrt{(A-A')^2+4B^2}}{2(B^2-AA')}, \quad x=\frac{A-A'\pm\sqrt{(A-A')^2+4B^2}}{2B}y;$$

Soit fait $u=\frac{1}{v}$ dans l'équation (4); il viendra

$$v^2-(A+A')v-(B^2-AA')=o,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=A+A';$$

mais en appelant α et β les demi-diamètres dirigés selon les axes, on a aussi

$$A=\frac{1}{\alpha^2}, \; A'=\frac{1}{\beta^2}, \; A+A'=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2};$$

d'où il suit

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2};$$

ainsi, *dans les courbes du second ordre la somme des carrés des valeurs inverses de deux diamètres rectangulaires est invariable.*

On déduit aisément de cette relation

$$\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\beta};$$

or, si l'on joint les extrémités de deux diamètres se coupant à angle droit, on formera un losange dont le périmètre sera $4\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ et la surface $2\alpha\beta$. Conséquemment *les aires des losanges inscrits dans une même ligne du second ordre sont proportionnelles à leurs périmètres.*

Si l'on remarque que le rapport de la surface d'un losange à son périmètre n'est autre que la moitié du rayon du cercle inscrit dans cette figure, il s'ensuit que *tous ces losanges sont circonscrits à un même cercle*, ce que l'on peut encore énoncer de la sorte : *toutes les cordes d'une ligne du second ordre qui sont vues du centre, sous un angle droit, enveloppent une même circonférence de cercle.*

En imaginant que cette circonférence ou tout autre circonférence concentrique soit prise pour courbe directrice, on tirera de ce dernier théorème par les polaires réciproques : *les sommets des angles droits circonscrits à une courbe du second ordre, sont situés sur une même circonférence de cercle*, en partant de là et en faisant usage de la même théorie, on pourra encore généraliser le théorème précédent comme il suit : *toutes les cordes d'une conique qui sont vues sous un angle droit d'un point quelconque de son plan, enveloppent une autre conique dont le point de vue occupe l'un des foyers.* (Ann. math. de janvier).

Dans le cas où les diamètres connus sont conjugués, on a, en désignant leurs demi-longueurs par p et q, $A=\frac{1}{p}$, $A'=\frac{1}{q}$ et $B=o$; ce qui change les équations (2) et (3) en

$$u^2-(p^2+q^2)\,u+p^2q^2\sin.^2\theta=o,$$

$$q^2\cos.\theta\, x^2-(p^2-q^2)\,xy-p^2\cos.\theta.\, y^2=o;$$

il résulte de la première que

$$p^2+q^2=m^2+n^2,\ pq\sin.\theta=\text{MN},$$

C'est-à-dire que la *somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés construits sur les axes, et que le parallèlogramme fait sur les mêmes diamètres est équivalent au rectangle de ces mêmes axes* (*).

Soit actuellement

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz-1=0$$

l'équation d'une surface du second ordre rapportée à trois de ses diamètres inclinés, deux à deux, des angles α, β, γ; l'équation d'une sphère concentrique d'un rayon variable $\sqrt{u}$ sera

$$x^2+y^2+z^2+2xy\cos.\alpha+2xz\cos.\beta+2yz\cos.\gamma-u=0;$$

et conséquemment, en désignant une constante indéterminée par ρ, celle qui suit

$$\rho\,(Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz-1)$$
$$+x^2+y^2+z^2+2xy\cos.\alpha+2xz\cos.\beta+2yz\cos.\gamma-u=0$$

appartiendra à une troisième surface du second ordre, qui contiendra les lignes de pénétration des deux premières; or, on peut mettre à profit l'indétermination de ρ pour rendre cette équation homogène, ce que l'on fera en posant $\rho+u=0$; d'où l'on tire $\rho=-u$, auquel cas elle deviendra :

(*) On peut déduire de ces formules un moyen de trouver les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués AA′, BB′ (*fig.* 3); je rapporte ici la construction, parce que la seconde partie me paraît peu connue, du point A on abaisse sur BB′ la perpendiculaire AC; on prend AE = AD = OB; puis on tire OE, OD. Le grand axe est égal à OE + OD et le petit à OE — OD; maintenant pour avoir la direction des axes, il suffira de diviser l'angle EOD et son supplément en deux parties égales par les droites OM, ON. — La question analogue pour l'hyperbole, n'offre aucune difficulté, parce qu'on obtient immédiatement les assymptotes en traçant les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres donnés.

$$(Au-1)x^2+(A'u-1)y^2+(A''u-1)z^2+2(Bu-\cos.\alpha)xy$$
$$+2(B'u-\cos.\beta)xz+2(B''u-\cos.\gamma)yz=o$$

ou bien

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2bxy+2b'xz+2b''yz=o \quad (5)$$

après avoir posé, pour abréger,

$$a=Au-1,\ a'=A'u-1,\ a''=A''u-1,\ b=Bu-\cos.\alpha,$$
$$b'=B'u-\cos.\beta,\ b''=B''u-\cos.\gamma; \quad (6)$$

elle représente alors une surface conique dont le sommet est à l'origine des coordonnées.

Il est facile de démontrer que les *trois sphères décrites sur les axes principaux d'une surface du second ordre, comme diamètres, la rencontrent selon trois systèmes de deux sections circulaires passant par le centre, dont un seul peut être réel.* Lors donc que le rayon de la sphère dont il vient d'être question sera égal à l'un de ces demi-axes, la surface conique (5) se réduira à un couple de plans réels ou imaginaires et réciproquement; mais on tire de son équation

$$ax+by+b'z=\pm\sqrt{(b^2-aa')y^2+(b'^2-aa'')z^2+2(bb'-ab'')yz},(7)$$

et pour qu'elle soit décomposable en facteurs rationnels du premier degré, il faut que l'expression soumise au radical soit un carré exact, c'est-à-dire, que l'on ait

$$(bb'-ab'')^2-(b^2-aa')(b'^2-aa'')=o,$$

ou bien, en développant et divisant par a,

$$ab''^2+a'b'^2+a''b^2-aa'a''-2bb'b''=o.$$

remplaçant les lettres a, a', a'', b, b', b'' par les expressions (6) qu'elles représentent, il vient pour l'équation aux carrés des demi-axes principaux

$$(Au-1)(B''u-\cos.\gamma)^2+(A'u-1)(B'u-\cos.\beta)^2+(A''u-1)(Bu-\cos.\alpha)^2-$$
$$(Au-1)(A'u-1)(A''u-1)-2(Bu-\cos.\alpha)(B'u-\cos.\beta)(B''u-\cos.\gamma)=0; \quad (8)$$

il est visible d'ailleurs que les deux plans dans lesquels la surface conique a dégénéré, correspondront à l'équation double

$$ax+by+b'z=\pm\left[\sqrt{b^2-aa'}y+\frac{bb'-ab''}{\sqrt{b^2aa'}}z\right],$$

et que par suite leur intersection, qui n'est autre que l'un des axes principaux de la proposée, sera représentée par

$$ax+by+b'z=0, \quad (b^2-aa')y+(bb'-ab'')z=0;$$

en sorte que la connaissance des grandeurs des axes entraînera aussi celle de leurs directions.

Si l'on suppose que les diamètres connus soient rectangulaires, on aura $\cos.\alpha=0$, $\cos.\beta=0$, $\cos.\gamma=0$, et l'équation (8) se réduira à

$$(Au-1)B''^2u^2+(A'u-1)B'^2u^2+(A''u-1)B^2u^2-$$
$$(Au-1)(A'u-1)(A''u-1)-2BB'B''u^3=0,$$

et, en ordonnant par rapport à u,

$$[AB''^2+A'B'^2+A''B^2-AA'A''-2BB'B'']u^3+$$
$$[AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2]u^2-[A+A'+A'']u+1=0$$

c'est l'équation dont *Petit* a fait usage pour discuter l'équation générale du second ordre à trois variables.

Soit posé $u=\frac{1}{v}$; les deux premiers termes de la transformée seront v^3 et $-(A+A'+A'')v^2$; donc, si l'on appelle l, m, n,

les trois demi-axes principaux, on aura

$$\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\mathrm{A}+\mathrm{A}'+\mathrm{A}'';$$

mais, en représentant par α, β, γ les trois demi-diamètres dans la direction des coordonnées, on a

$$\mathrm{A}=\frac{1}{\alpha^2},\ \mathrm{A}'=\frac{1}{\beta^2},\ \mathrm{A}''=\frac{1}{\gamma^2},$$

et par suite

$$\frac{1}{l^2}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2};$$

ainsi, *la somme des carrés des valeurs inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques d'une surface du second ordre, est invariable.*

On déduit de la relation précédente

$$\frac{\sqrt{m^2n^2+l^2n^2+l^2m^2}}{mnl}=\frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}}{\alpha\beta\gamma};$$

or, si l'on imagine un octaèdre ayant pour sommets les six extrémités des diamètres dont il s'agit, son volume sera exprimé par $\frac{4}{3}\alpha\beta\gamma$ et sa surface par $4\sqrt{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}$, attendu que le carré d'une aire plane est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires ; il s'ensuit donc que les *volumes des octaèdres à faces triangulaires et isocèles, inscrits dans une même surface du second ordre, sont proportionnels à leurs surfaces convexes.*

Si l'on observe présentement que le rapport du volume à la surface dans un octaèdre de ce genre n'est autre chose que le tiers du rayon de la sphère qu'on peut y inscrire, on conclura sur-le-champ que *tous ces octaèdres sont circonscrits à la même*

surface sphérique ; autrement : *si un angle solide tri-rectangle, pivote autour de son sommet placé au centre d'une surface du second ordre, le plan déterminé par les points où ses arètes percent la surface, enveloppe une même surface sphérique.*

En prenant cette sphère ou tout autre sphère concentrique pour surface directrice, il résulte de cette proposition par la théorie des polaires : *tous les angles solides tri-rectangles circonscrits à une même surface du second ordre, ont leurs sommets sur une surface sphérique de même centre.*

Et delà encore : *Si un angle solide et tri-rectangle pivote autour de son sommet supposé fixe, le plan déterminé par les points où ses arètes rencontrent une surface du second ordre, enveloppe une surface du même ordre, ayant pour foyer le sommet fixe.* (*Annales*, lettre de M. *Poncelet,* t. 17, p. 270, — t. 18, p. 200).

Quand les lignes coordonnées sont dirigées suivant trois diamètres conjugués $2p, 2q, 2r$, on a $A=\frac{1}{p^2}$, $A'=\frac{1}{q^2}$, $A''=\frac{1}{r^2}$, $B=o$, $B'=o$, $B''=o$, ce qui change l'équation (8) en

$$q^2r^2(u-p^2)\cos.^2\gamma+p^2r^2(u-q^2)\cos.^2\beta+p^2q^2(u-r^2)\cos.^2\alpha-$$
$$(u-p^2)(u-q^2)(u-r^2)+2p^2q^2r^2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma=o,$$

et, en ordonnant par rapport à u et remplaçant dans le troisième terme, $\cos^2.$ par $1-\sin.^2$,

$$u^3-(p^2+q^2+r^2)u^2+(p^2q^2\sin.^2\alpha+p^2r^2\sin.^2\beta+q^2r^2\sin.^2\gamma)u-$$
$$p^2q^2r^2(1-\cos.^2\alpha-\cos.^2\beta-\cos.^2\gamma+2\cos.\alpha\cos.\beta\cos\gamma)=o;$$

d'où il suit :

$$l^2+m^2+n^2=p^2+q^2+r^2,$$
$$p^2q^2\sin.^2\alpha+p^2r^2\sin.^2\beta+q^2r^2\sin.^2\gamma=l^2m^2+l^2n^2+m^2n^2,$$
$$p^2q^2r^2(1-\cos.^2\alpha-\cos.^2\beta-\cos.^2\gamma+2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\gamma)=l^2m^2n^2,$$

résultats que l'on a coutume d'énoncer ainsi : 1° la *somme des*

carrés de trois diamètres conjugués quelconques d'une surface du second ordre est invariable ; 2° le *parallèlipipède construit sur trois diamètres conjugués a un volume constant ;* 3° la *somme des carrés des faces de ce parallèlipipède est aussi constante.*

On peut encore, à l'aide des considérations qui précèdent, trouver les conditions essentielles pour qu'une surface du second ordre soit de révolution. En effet, dans cette hypothèse, les sphères décrites sur les axes égaux comme diamètres se confondent et touchent la surface selon l'équateur ; l'équation (7) représente donc alors un plan unique, ce qui exige que

$$b^2 - aa' = o, \; b'^2 - aa'' = o, \; bb' - ab'' = o;$$

équations qui se ramènent aisément à celles-ci :

$$bb' - ab'' = o, \; bb'' - a'b' = o, \; b'b'' - a''b = o;$$

qui deviennent, après la substitution des valeurs (6),

$$\begin{aligned}(Bu - \cos.\alpha)(B'u - \cos.\beta) - (Au - 1)(B''u - \cos.\gamma) &= o,\\ (Bu - \cos.\alpha)(B''u - \cos.\gamma) - (A'u - 1)(B'u - \cos.\beta) &= o,\\ (B'u - \cos.\beta)(B''u - \cos.\gamma) - (A''u - 1)(Bu - \cos.\alpha) &= o;\end{aligned}$$

en éliminant u entre ces trois équations, on en obtiendra deux autres qui seront celles de condition cherchées ; il est visible en outre que l'axe de révolution sera perpendiculaire au plan $ax + by + b'z = o$.

Dans le cas où les axes sont rectangulaires, les trois équations qui précèdent se changent en

$$(BB' - AB'')u + B'' = o, \; (BB'' - A'B')u + B' = o,$$
$$(B'B'' - A''B)u + B = o;$$

et l'on en déduit ces trois autres

$$B(B'^2 - B''^2) + B'B''(A' - A) = o, B'(B''^2 - B^2) + BB''(A'' - A') = o,$$
$$B''(B^2 - B'^2) + BB'(A - A'') = o;$$

dont deux quelconques comportent la troisième.

On sait que neuf points de l'espace déterminent généralement une surface du 2e ordre ; mais si l'on désigne la nature de la surface que l'on veut avoir, à combien devra-t-on réduire le nombre des points donnés, pour que la construction puisse avoir lieu ? (on sait, par exemple, que pour la sphère, ce nombre se réduira à quatre). Problème énoncé à la page 120 du IIIe volume, et résolu par M. Pagani, professeur extr. à l'Université de Louvain.

Nous omettrons la démonstration des diverses propositions dont se compose cette réponse, pour laisser au lecteur le plaisir d'en trouver une qui, d'ailleurs, ne peut pas être difficile à découvrir. En outre, pour abréger le langage, nous nommerons parabole *équilatère* celle dont le paramètre est égal à l'unité, et nous désignerons par le nom de *premier* hyperboloïde celui qui n'a qu'une nappe, en donnant le nom de *deuxième* hyperboloïde à celui qui en a deux. Par la même raison, nous dirons *premier* paraboloïde, au lieu de paraboloïde elliptique, et *deuxième* paraboloïde, au lieu de paraboloïde hyperbolique (1). Cela posé, voici le nombre et l'espèce des surfaces du second ordre, dont l'équation la plus générale renferme quatre, cinq, etc., coefficiens arbitraires.

Quatre coefficiens.

Une sphère.

Cinq coefficiens.

1. Un cylindre droit dont la base est un cercle ou une parabole équilatère : 2. un cône droit à base circulaire et dont la génératrice fait un angle demi-droit avec l'axe : 3. 1er paraboloïde de révolution dont le méridien est une parabole équilatère.

(1) Nous conservons les dénominations employées par M. *Pagani*, sans croire toutefois à la nécessité de les introduire dans la géométrie. A. Q.

Six coefficiens.

1. Un cylindre droit dont la base est une hyperbole équilatère ou une parabole : 2. un cône droit à base circulaire : 3. 1[er] paraboloïde de révolution : 4. 2[me] paraboloïde dont les sections principales sont des paraboles équilatères : 5. Un hyperboloïde de révolution dont le méridien est une hyperbole équilatère.

Sept coefficiens.

1. Un cylindre à base elliptique ou hyperbolique. 2. Un cône à base elliptique et dont une des sections principales est formée par deux droites orthogonales. 3. Un paraboloïde dont une des sections principales est une parabole équilatère. 4. 2[me] paraboloïde dont deux sections principales sont égales. 5. Un hyperboloïde de révolution. 6. Un ellipsoïde de révolution.

Huit coefficiens.

1. Un cône droit à base elliptique. 2. Un paraboloïde. 3. Un hyperboloïde dont une des sections principales est une hyperbole équilatère.

Neuf coefficiens.

1. Un hyperboloïde. 2. Un ellipsoïde.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

Extrait d'un mémoire *sur les propriétés polaires de trois sections planes, d'une surface du second ordre*, par M. Th. Olivier, ancien élève de l'école Polytechnique.

Il peut exister entre les trois courbes planes C′, C″, C‴ situées sur une surface du second ordre Σ, treize relations de position.

Les plans P′, P″, P‴, de ces trois courbes se couperont en un point p qui pourra être :

1° Extérieur, par rapport à la surface Σ ; ou 2° intérieur, par rapport à la surface Σ ; ou 3° situé sur la surface Σ.

Les trois plans P′, P″, P‴, peuvent se couper suivant une même droite qui sera :

4° Extérieure, par rapport à la surface Σ ; ou 5° intérieure, par rapport à la surface Σ ; ou 6° tangente à la surface Σ.

Les trois plans P′, P″, P‴, peuvent se couper deux à deux suivant trois droites parallèles, qui seront :

7° Toutes trois extérieures, par rapport à la surface Σ; ou 8° toutes trois intérieures, par rapport à la surface Σ ; ou 9° une intérieure et deux extérieures, par rapport à la surface Σ; ou 10° une extérieure et deux intérieures, par rapport à la surface Σ; ou 11° une tangente à la surface Σ, et deux intérieures ou extérieures, par rapport à cette surface : ou 12° une tangente, et la

deuxième intérieure et la troisième extérieure, ou 13° deux tangentes à la surface Σ, et la troisième intérieure ou extérieure, par rapport à cette surface :

Je n'entreprendrai point l'examen détaillé de ces divers cas ; car il est facile de voir ce qui doit arriver pour chacun d'eux, lorsque l'on demandera de construire les courbes tangentes aux trois sections planes C′, C″, C‴.

Je ferai observer seulement que la construction d'une courbe tangente aux trois sections C′, C″, C‴, sera possible toutes les fois que l'on pourra mener, par l'une des droites qui contiennent trois à trois les sommets des cônes enveloppant deux à deux les trois courbes C′, C″, C‴, un plan tangent à la surface Σ : et qu'il y aura autant de courbes tangentes possibles, que de plans tangens possibles à la surface Σ ;

Si je suppose que les trois plans P′, P″, P‴, se coupent deux à deux suivant trois droites parallèles, alors les trois droites $L'_{,,}$, $L'_{,,,}$, $L''_{,,,}$ sont parallèles et le point *p* est situé à l'infini. Dès lors la courbe C intersection du plan P, *plan polaire* de la surface Σ, par rapport au *pôle p*, sera la courbe de contact d'un cylindre tangent à Σ et dont les génératrices seront parallèles aux droites $L'_{,,}$, $L'_{,,,}$, $L''_{,,,}$.

La courbe C sera évidemment une section faite dans la surface Σ, par un plan diamétral ; car le *pôle p* étant aussi-bien au-dessus qu'au-dessous du plan P, la surface Σ doit être coupée symétriquement par ce plan P.

Le plan P, dans le cas ou son *pôle p* est situé à l'infini, passe donc par le centre de la surface Σ.

J'ai démontré dans le n° 3 du tome III° de la *Correspondance des Pays-Bas*, que *par deux sections planes faites dans un cône du second degré, l'on pouvait faire passer une infinité de ces surfaces du second ordre*.

En vertu de ce qui précède, l'on peut démontrer facilement que *les centres de toutes ces surfaces seront sur un plan unique :* et en effet.

C′ et C″ étant les deux courbes par lesquelles passent la série de surfaces du second ordre Σ, Σ′, $\Sigma'_{,,}$, etc.

Je désigne par S et S′ les sommets des deux cônes enveloppant les deux courbes C′ et C″.

Je désigne par C la courbe de contact de Σ avec le cylindre dont les génératrices seront parallèles à la droite $L'_{,,}$; par C_1 la courbe de contact de Σ' avec le cylindre dont les génératrices seront parallèles à la droite $L'_{,,}$; par C_2 la courbe de contact de Σ'' avec le cylindre dont les génératrices seront parallèles à la droite $L'_{,,}$, etc ;

Le plan de la courbe C sera plan diamétral de la surface Σ; celui de la courbe C_1 sera plan diamétral de la surface Σ' ; celui de la courbe C_2 sera plan diamètral de la surface Σ'' ; etc., etc.

Tous ces plans diamétraux se confondront, parce qu'ils passent tous par les quatre points de contact des tangentes menées à C′ et C″, parallèlement à la droite $L'_{,,}$.

Et comme ces quatre points de contact sont dans un plan passant par les deux sommets S et S′, l'on peut énoncer le théorème suivant :

Par deux sections planes C′ et *C″ d'une surface du second ordre, l'on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre, qui auront toutes leurs centres sur un plan unique, passant par les sommets des deux cônes enveloppant les courbes C′* et *C″*.

Si les plans des deux courbes C′ et C″ étaient parallèles, alors leur intersection $L'_{,,}$, serait à l'infini ; et dans ce cas, les centres de toutes les surfaces Σ, Σ', Σ'', etc., seront sur la droite SS′; car, il est évident, par ce qui précède, que : je pourrai construire une infinité de cylindres tangens à la surface Σ, dont les génératrices seront parallèles aux plans de C′ et C″ ; et que tous les plans des courbes de contact passeront par la droite SS′, qui passera elle-même par les centres des courbes C′ et C″.

Je puis donc énoncer le théorème suivant :

Par deux sections parallèles C′ et *C″ d'une surface du second ordre, l'on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre, qui auront toutes leurs centres sur une droite unique, et qui n'est autre que celle qui unit les sommets des deux cônes enveloppant les courbes C′* et *C″*.

Étant données trois sections planes C′, C″, C‴, d'une surface du second ordre, Σ; leurs trois plans P′, P″, P‴, se coupant en un point p, il sera facile de construire le centre de la surface Σ; en effet :

Je mènerai à chacune des deux courbes C′ et C″, deux tangentes parallèles à la droite $L'_{,,}$; les quatre points de contact seront sur un plan diamétral $D'_{,,}$ de la surface Σ.

J'obtiendrai de la même manière, par rapport aux courbes C′ et C‴, le plan $D'_{,,,}$; par rapport aux courbes C″ et C‴, le plan $D''_{,,,}$. Les trois plans $D'_{,,}$, $D'_{,,,}$, $D''_{,,,}$ se couperont en un point qui sera le centre de la surface Σ.

Si les trois plans $D'_{,,}$, $D'_{,,,}$, $D''_{,,,}$ se coupent deux à deux, suivant trois droites parallèles entre elles, alors la surface Σ sera l'un des deux paraboloïdes.

Étant donnée une surface du second ordre Σ et une section plane C, et le sommet p d'un cône tangent à Σ, suivant la courbe C; j'inscris un triangle abc dans cette courbe du second degré C, et je mène les trois génératrices ap, bp, cp, du cône tangent p.

Dans le plan bap, je construis une courbe C′, tangente, soit à la droite ap au point a, soit à la droite bp au point b, et je puis construire une infinité de courbes telles que C′.

Dans le plan bcp, je construis une courbe C″, tangente, soit à la droite lp au point b, soit à la droite cp au point c, et je puis construire une infinité de courbes telles que C″.

Dans le plan acp, je construis une courbe C‴, tangente, soit à la droite bp au point a, soit à la droite cp au point c, et je puis construire une infinité de courbes telles que C‴.

Les trois courbes du second degré C′, C″, C‴, ayant deux à deux une tangente commune, seront deux à deux sur trois surfaces coniques.

J'ai démontré dans le numéro 3 du tom. III[e] de la *Correspondance*, que, lorsque trois sections coniques pouvaient être enveloppées deux à deux par une surface conique, elles étaient toutes les trois sur une surface du second degré.

Par conséquent, et comme je puis faire varier les courbes C', C'', C''', je conclurai le théorème suivant :

Deux surfaces du second ordre ont toujours pour ligne de contact une courbe du second degré.

Et par une section plane C, d'une surface du second ordre Σ, *l'on peut faire passer une infinité de surfaces, aussi du second ordre, qui seront tangentes entre elles et à* Σ, *suivant la courbe* C.

Deux surfaces du second ordre, tangentes entre elles suivant une courbe plane, peuvent, rigoureusement, être considérées comme se coupant suivant deux courbes du second degré, dont les plans sont infiniment voisins l'un de l'autre et parallèles entre eux.

En vertu de cette considération infinitésimale et de tout ce qui précède, je puis énoncer les théorèmes suivans :

Étant donnée une surface du second ordre Σ, et une droite L, arbitrairement située dans l'espace; si, par la droite L, je fais passer une infinité de plans sécans, donnant pour sections dans la surface Σ, les courbes planes α, α', α'', etc.

Désignant par R, la *polaire réciproque* de L;

1° Toutes les surfaces du second ordre, tangentes entre elles et à Σ, suivant les courbes α, α', α'', etc., auront leurs centres sur un plan unique passant par la droite R.

2° Toutes les surfaces du second ordre, tangentes entre elles et à Σ, suivant l'une seulement des courbes α, α', α'', etc., α par exemple, auront, ainsi que Σ, leurs centres situés sur la droite passant par le centre de la courbe α et le sommet p du cône tangent à Σ suivant α, ou en d'autres termes : sur la droite passant par le centre de α et le *pôle* p, de Σ par rapport au plan polaire P, contenant la courbe α.

Et toutes les surfaces du second ordre, tangentes à Σ suivant α, auront toutes avec Σ, même *pôle* p et même *plan polaire* P.

3° Toutes les surfaces du second ordre, passant par deux quelconques des courbes α, α', α'', etc., auront leurs centres situés sur un plan unique passant par la droite R.

Si les plans des courbes α, α', α'', etc., sont parallèles

entre eux, si, par conséquent, la droite L est située à l'infini, la droite R devient un diamètre de la surface Σ, dont les extrémités sont les points de contact des deux plans menés tangentiellement à Σ et parallélement aux plans des courbes α, α', etc.

Alors, toutes les surfaces tangentes à Σ, suivant l'une des courbes α, α', α'', etc., ou passant par deux de ces courbes, auront leurs centres situés sur le diamètre R.

ANALISE.

Addition à la solution du problème sur les valeurs moyennes des nombres, donnée dans le numéro précédent par M. Lobatto.

Voici encore une nouvelle propriété qu'on peut déduire immédiatement de la deuxième partie du théorème.

Désignons les n nombres par les fractions $\frac{1}{a}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_{n-1}}$, on aura d'après la propriété dont il s'agit

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}+\ldots\frac{1}{a_{n-1}}\right] > \frac{1}{\sqrt[n]{aa_1a_2\ldots a_{n-1}}}$$

et en même temps

$$\frac{1}{n}[a+a_1+\ldots a_{n-1}] > \sqrt[n]{aa_1a_2\ldots a_{n-1}}$$

par conséquent

$$\frac{1}{\sqrt[n]{aa_1a_2\ldots a_{n-1}}} > \frac{1}{\frac{1}{n}(a+a_1+\ldots a_{n-1})}$$

donc, a plus forte raison

$$\frac{1}{n}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a_1}+\ldots\frac{1}{a_{n-1}}\right] > \frac{1}{\frac{1}{n}(a+a_1+\ldots a_{n-1})}.$$

Ce qui prouve que *la moyenne d'un nombre quelconque de rapports exprimés par des fractions dont les numérateurs sont l'unité, sera toujours plus forte que la fraction qui a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur la moyenne des dénominateurs des fractions données.*

Toutefois il est facile de voir que la différence entre ces deux rapports diminuera à mesure que les dénominateurs a, a_1 ..., différeront moins entre eux.

Le résultat que nous venons de trouver reçoit une application utile dans les recherches statistiques, où il s'agit de prendre la moyenne de plusieurs rapports fractionnaires peu différens entre eux. Après les avoir réduits chacun à la forme $\frac{1}{a}$, l'on pourra, sans erreur sensible, substituer à leur valeur moyenne, l'unité divisée par la moyenne des dénominateurs. Mais il n'en serait plus de même, dans le cas où les dénominateurs présenteraient des différences assez considérables; c'est une erreur qu'on a vu commettre quelquefois dans des ouvrages de statistique.

MÉCANIQUE ANALITIQUE.

Addition à la *note relative au mouvement de rotation des corps solides dans un certain cas particulier*, (Voyez n° 1, tom. IV de la *Correspondance*), par M. Pagani, professeur extr. à l'Université de Louvain.

Considérons une barre cylindrique homogène AB suspendue par l'extrémité A à un fil flexible OMA attaché au point fixe O (*fig.* 4). En imprimant un mouvement de rotation au point O, supposons que la barre AB soit parvenue à un état permanent dans lequel le point C, qui se trouve sur la verticale Ox, reste

immobile pendant que les deux parties CA, CB, de la barre décrivent une surface conique ayant son centre au point C. Le fil flexible OMA formera une certaine courbe et décrira une surface de révolution nécessairement différente de celle d'un cône. Connaissant la longueur et la densité du fil OMA, la longueur et la densité de la barre AB, et la vitesse angulaire du système, il s'agit de trouver l'équation de la courbe OMA et la position de la barre AB.

Ce problème, considéré dans toute sa généralité, conduit à des formules où les inconnues sont mêlées de manière à ne pouvoir les éliminer que très-difficilement; ce qui empêche d'arriver à des résultats comparables avec les expériences. Mais, en faisant quelques hypothèses sur la position du point C, ou sur la courbure du fil OA, on parvient à des formules beaucoup plus simples et qui permettent de calculer toutes les autres inconnues du problème.

Dans la note citée, j'ai supposé que le point C était au milieu ou au centre de gravité de la barre AB; hypothèse qui s'écarte très-peu de la vérité, lorsque le fil OA a une longueur suffisante. M. *Desalis*, au contraire, a supposé que le fil OA reste en ligne droite; ce qui ne peut avoir lieu, rigoureusement, qu'en supposant au fil une densité infiniment petite, et à la vitesse angulaire une valeur finie.

La diversité de nos hypothèses a dû nécessairement nous conduire à des formules différentes; mais on aurait tort de juger de la vérité des unes en les comparant aux autres. En général, tous les résultats d'un calcul exact sont exacts en ce qu'ils représentent les conséquences rigoureuses des principes ou des hypothèses sur lesquels on a établi les équations primitives. Reste donc à savoir laquelle de nos deux hypothèses s'approche davantage de la réalité du phénomène; et ici, je crois encore pouvoir affirmer que cela dépend des circonstances. Si, par exemple, le fil flexible est très-mince et très-court, et si la vitesse de rotation n'est pas très-grande, la supposition de M. *Desalis* approchera, plus que la mienne, de la réalité; au contraire, si le fil a une certaine épaisseur, comparable avec

celle de la barre, une longueur au moins égale, et si la vitesse angulaire est très-grande, alors mon hypothèse conduit à des résultats plus conformes à ceux de l'expérience que celle qui a été adoptée par M. *Desalis*.

Pour confirmer ce que je viens d'avancer, il est bon de mettre le problème en équation sans aucune restriction. Nommons, pour cela,

$2l$ la longueur de la barre AB ;
l' la longueur du fil OA ;
h la distance entre le point C et le milieu G ;
b la distance du point de suspension A à la verticale Ox ;
α l'angle ACO ;
β l'angle ATO formé par la tangente AT et par la verticale OT ;
θ la vitesse angulaire du système ;
σ la masse pour l'unité de longueur du cylindre AB ;
σ' la masse pour l'unité de longueur du fil OA ;
x l'abscisse verticale OP d'un point quelconque M du fil ;
y l'ordonnée horizontale MP du même point M ;
s la longueur du fil depuis l'origine O jusqu'au point M ;
g le coefficient de la pesanteur.

En suivant la marche indiquée dans la note citée, on trouvera aisément

$$(1) \qquad b = (l + h) \sin. \alpha.$$

$$(2) \qquad \text{tang.} \beta = \frac{h}{g} \theta^2 \sin. \alpha.$$

$$(3) \qquad \cos. \alpha = \frac{3g}{(l - 3h)\theta^2}.$$

$$(4) \qquad \frac{ds}{dx} = \text{const.} - \frac{\sigma^1 \theta^2 y^2}{4gl\sigma}.$$

Ces quatre équations doivent servir à la détermination des inconnues b, h, α, β, en fonction des autres quantités que nous supposons connues. Après avoir intégré l'équation (4), on aura

l'arc s en fonction de l'ordonnée y; par conséquent, en faisant $s = l'$, ce qui exige que l'on ait $y = b$, on obtiendra une équation entre l'inconnue b et les autres quantités. Mais comme il faudra préalablement déterminer la constante arbitraire, ce qui introduira l'angle β dans l'équation (4); on devra considérer cette équation comme donnant une relation entre les deux inconnues b, β, et les autres quantités connues.

Si nous supposons $h = o$, les trois premières équations ci-dessus nous donnant $\beta = o$, $b = l' \sin. \alpha$, $\cos. \alpha = \frac{3g}{l\theta^2}$, on voit que toutes les inconnues sont déterminées; par conséquent, l'équation (4) établira une équation de condition entre les données du problème. Toutes les fois que cette condition sera satisfaite, on pourra regarder la solution, dans l'hypothèse de $h = o$, comme exacte. Ce qui démontre qu'il peut exister une infinité de cas où la barre cylindrique homogène peut tourner autour de son centre de gravité.

Si, au contraire, on néglige le terme variable dans le second membre de l'équation (4); l'intégrale de cette équation nous donnant $b = l' \sin. \beta$, les trois premières équations deviendront :

$$l' \sin. \beta = (l + h) \sin. \alpha.$$

$$\tang. \beta = \frac{h}{g} \theta^2 \sin. \alpha.$$

$$\cos. \alpha = \frac{3g}{(l - 3h)\theta^2}.$$

d'où, éliminant h, on obtiendra

$$\tang. \beta = \frac{\theta^2}{g} (l' \sin. \beta - l \sin. \alpha)$$

$$\tang. \alpha = \frac{\theta^2}{g} \left(\frac{4}{3} l \sin. \alpha - l' \sin. \beta \right);$$

formules qui coïncident avec celles de M. Desalis. Aussi ce savant géomètre a-t-il supposé que le fil restait en ligne droite pendant le mouvement. Nous sommes maintenant en état d'apprécier cette hypothèse; puisqu'il faut que l'on ait, pour son exactitude, la quantité $\sigma' \theta^2$ infiniment petite relativement à $4gl\sigma$. Or, quoique l'on puisse supposer, sans erreur sensible, σ' infiniment petit par rapport à σ, le facteur θ^2, qui croît indéfiniment avec la vitesse de rotation, peut bien rendre le produit $\sigma' \theta^2$ comparable avec $4gl\sigma$. Dans ce cas, les formules que nous venons d'obtenir, dans l'hypothèse que le fil reste en ligne droite pendant le mouvement, seront en défaut.

Nous terminerons cette addition en ramenant l'intégrale de l'équation (4) aux transcendantes elliptiques.

Posons, pour abréger,

$$a^2 = \frac{4gl\sigma}{\sigma\theta^2}, \quad \text{const.} = f,$$

l'équation (4) nous donnera

$$(5) \qquad \frac{ds}{dx} = f - \frac{y^2}{a^2};$$

et si nous faisons $p = \frac{dy}{dx}$, nous trouverons successivement

$$1 + p^2 = \left(f - \frac{y^2}{a^2}\right)^2$$

$$p^2 = \left(f + 1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\left(f - 1 - \frac{y^2}{a^2}\right).$$

soit

$$(6) \qquad f = \frac{1 + c^2}{1 - c^2},$$

c étant une nouvelle constante arbitraire, et supposons

$$(7) \qquad y = \frac{2ac \sin. \varphi}{\sqrt{2(1 - c^2)}},$$

en dénotant par φ une nouvelle variable; la dernière équation nous donnera

$$p = \frac{2c \cos.\varphi}{1 - c^2}\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}.$$

Partant

$$(8) \qquad dx = \frac{a\sqrt{2(1-c^2)}}{2\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$(9) \qquad ds = \frac{a(1 + c^2 - 2c^2 \sin.^2\varphi)}{\sqrt{2(1-c^2)}\sqrt{1 - c^2 \sin.^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Après que l'on aura déterminé la constante c, l'équation (8) combinée avec l'équation (7), servira à faire connaître la courbe formée par le fil OA; et l'intégrale du second membre de la formule (9), prise entre les limites $y = o$, $y = b$, étant égale à l', elle nous fournira une nouvelle relation entre les inconnues du problème. Cette équation, jointe aux trois premières, servira à la complète détermination des quantités b, h, α et β.

Maintenant, pour avoir la valeur de c, observons qu'en faisant $y = b$ dans l'équation (5), nous devons avoir $\frac{dx}{ds} = \cos.\beta$: ce qui nous donnera d'abord $f = \frac{a^2 + b^2 \cos.\beta}{a^2 \cos.\beta}$. En substituant cette valeur de f dans l'équation (6), on en déduira sans peine

$$(10) \qquad c^2 = \frac{a^2 + (b^2 - a^2)\cos.\beta}{a^2 + (b^2 + a^2)\cos.\beta}.$$

Au moyen de cette valeur de c^2, on aura, au lieu de l'équation (7), la suivante

$$(11) \qquad y = \sqrt{b^2 + a^2(\sec.\beta - 1)}.\sin.\varphi.$$

Nommons φ' la valeur de φ qui répond à $y = b$; cette dernière équation nous fournira

$$(12)\quad \varphi' = \text{arc. sin.}\left(\frac{b}{\sqrt{b^4 + a^2(\text{sec.}\,\beta - 1)}}\right).$$

Donc, en intégrant l'équation (9) depuis $\varphi = o$ jusqu'à $\varphi = \varphi'$, on aura

$$(13)\quad l' = \frac{a}{\sqrt{2(1-c^2)}}\int_o^{\varphi'} \frac{(1 + c^2 - 2c^2\,\text{sin.}^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\,\text{sin.}^2\varphi}}.$$

Laissons la longueur l' du fil OA indéterminée, et supposons que cette longueur soit telle que l'on ait $\beta = o$; alors nos formules se simplifieront et nous aurons, comme plus haut,

$$(14)\qquad b = l\,\text{sin.}\,\alpha \qquad \text{cos.}\,\alpha = \frac{3g}{l\theta^2};$$

ensuite les formules (10) et (12) nous donneront

$$c^2 = \frac{b^2}{2a^2 + b^2},\quad \varphi' = \frac{\pi}{2}.$$

En nous rappelant que nous avons fait $a^2 = \dfrac{4gl\sigma}{\sigma'\theta^2}$, la dernière valeur de c^2 deviendra, en y substituant pour b sa valeur donnée par les équations (14),

$$(15)\qquad c^2 = \frac{\sigma'(l^2\theta^4 - 9g^2)}{8gl\sigma\theta^2 + \sigma'(l^2\theta^4 - 9g^2)}$$

Si nous faisons $\sigma' = \sigma$, nous retombons sur les formules que nous avons déjà trouvées dans la note citée. Mais, si la vitesse

angulaire est telle que l'on ait $\theta^2=\frac{3g}{l}$, ce cas mérite attention, puisque l'on a $c=o$, $a=o$; ce qui prouve que la barre et le fil seront dans la verticale qui passe par le point O. Alors l'équation (13) devient

$$t=\frac{a\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\theta}\sqrt{\frac{gl\sigma}{2\sigma'}}=\pi l\sqrt{\frac{\sigma}{6\sigma'}}.$$

Telle doit être la longueur du fil pour que la barre ne quitte point la verticale, lorsque la vitesse angulaire est égale à $\sqrt{\frac{3g}{l}}$. On voit que le fil OA doit être d'autant plus long qu'il est moins dense par rapport à la barre AB.

Extrait d'une lettre de M. Dandelin, Professeur à l'École Royale des Mines à Liége.

Je vous adresse, mon ami, une singulière difficulté de mécanique.

Vous savez que si un corps appuyé par plusieurs points (x,y) (x',y') (x'',y'') sur un plan, est sollicité par une force unique R, on a pour déterminer les composantes de cette force en (x,y) (x',y') (x'',y'') les relations

$$Ra=Px+P'x'+P''x''.......$$
$$Rb=Py+P'y'+P''x''.......$$

a et b étant les coordonnées du point d'application de la force R.

Supposons que le plan soit d'ivoire, et les points d'appui de différentes matières, en sorte qu'en (xy) ce soit du fer, en $(x'y')$ du cuivre, en $(x''y'')$ du plomb, etc., on aura pour les rapports du frottement à la pression en xy, $f=\varphi P$; en $x'y'$, $f'=\varphi' P'$; en $x''y''$, $f''=\varphi'' P''$, etc.; d'après cela ce frottement total, dans un sens quelconque F, sera

$$f+f'+f''.....=\varphi P+\varphi' P'+\varphi'' P'',$$

et l'on n'aura pour déterminer F que les deux équations

$$Ra = Px + P'x' + \dots$$
$$Rb = Py + P'y' + \dots$$

Ainsi F sera indéterminée.

Or, il semble singulièrement absurde d'admettre une partie de ce fait, car de quelque manière qu'on envisage la chose, on voit bien qu'on n'aura jamais qu'une force déterminée à vaincre, lorsqu'on voudra faire glisser ce corps sur ce plan. On penserait peut-être restreindre l'indétermination par une hypothèse de résistance *maximum* ou *minimum*, mais cela ne ferait disparaître l'indétermination que pour un nombre particularisé de forces et non dans le cas général.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE.

Sur le retour de la comète d'Encke, au mois d'août 1828 (1).

La *Bibliothéque universelle* de Genève (mai 1825) (2) contient un article intéressant sur la comète d'*Encke*, dont le prochain retour fournira sans doute une nouvelle série d'observations importantes pour l'astronomie. Comme la comète ne sera pas visible à l'œil nu, nous avons cru bien faire en indiquant à nos lecteurs les étoiles dans le voisinage desquelles elle doit passer.

27 Août (1828)	λ du bélier.
13 Octobre	δ et ε d'andromède.
20 Octobre	α d'andromède.
2 Novembre. . . .	β et h de pégase.
30 Novembre. . . .	δ et γ du petit cheval.

En désignant par l'unité, la distance de la terre au soleil,

(1) On sait que cette même comète a été nommée encore *comète des douze cents jours*, du temps de sa révolution, ou *comète à courte période*, et quelquefois *comète de Pons*, du nom de l'astronome qui observa le premier son retour en 1818.

(2) Voyez aussi l'*Annuaire du bureau des longitudes*, 1828.

on aura pour les distances de la comète à la terre :

23 Août	1,569
21 Septembre.	1,000
22 Octobre	0,606
21 Novembre.	0,486
11 Décembre (périgée). . .	0,472
31 Décembre	0,572

L'opposition avec le soleil aura lieu le 12 octobre, et la conjonction avec le même astre le 1er janvier 1829.

Les élémens elliptiques sont les suivans :

Révolution de la comète.	1212 jours.
Passage au périhélie, 10 janv. 1829 . .	6 h. du mat.
Demi-grand axe	2,22436
Rapport de l'excentricité au demi-grand axe.	0,844705
Longitude du périhélie.	157° 17′ 26″,2
Longitude du nœud ascendant. . . .	334° 28′ 47″,1
Inclinaison de l'orbite.	13° 20′ 47″,9
Mouvement héliocentrique direct.	

PHYSIQUE.

Lettre *sur différentes expériences d'optique*, par M. Lipkens, Inspecteur général du cadastre dans le Royaume des Pays-Bas.

Monsieur,

Depuis quelques jours, mes momens de loisir sont employés à étudier toutes les particularités d'un phénomène assez singulier,

que je n'ai trouvé décrit dans aucun des ouvrages de sciences qui sont tombés entre mes mains, et qui me semble digne de l'attention des physiciens, parce qu'il est de nature à conduire, sinon à quelque nouvelle donnée sur la modification que les rayons lumineux subissent quand ils passent près des extrémités des corps, ou par de petites ouvertures, du moins à corroborer les lois connues de la diffraction, soit qu'on explique celle-ci par la théorie des *accès* ou par celle des *interférences*.

L'appareil dont je fais usage dans mes expériences, et que je vais avoir le plaisir de vous détailler, n'est pas compliqué, car il se réduit à deux petites plaques de fer-blanc; elles sont percées de trous circulaires d'un demi-millimètre de diamètre; en les considérant dans le sens de la longueur de la plaque, ils sont distans de centre à centre de 1 millimètre, tandis que dans le sens de la largeur, cette distance n'est que de $\frac{10}{11}$ de millimètre.

Tenant d'une main une de ces plaques contre l'œil (le plus grand côté verticalement), et de l'autre main tenant la seconde plaque dans la même position à 5 centimètres environ de distance l'une de l'autre, on verra (lorsque les faces des deux plaques sont parallélement présentées), que les trous et les pleins de la seconde plaque sont amplifiés. A mesure qu'on éloignera *la seconde plaque* (tenant toujours la première contre l'œil), on verra que l'amplification diminue, et certes en cela le phénomène ne présente rien de remarquable, parce que le tout s'explique par l'augmentation et la diminution de l'angle optique, sous lequel on voit les trous à différentes distances.

Mais ce à quoi je ne m'attendais pas, c'est qu'après avoir éloigné ainsi la seconde plaque de la première à 30 centimètres environ, si on la tient immobile et qu'on en approche la première, on voit que les trous de la seconde plaque paraissent de nouveau amplifiés, et cela d'autant plus que la distance entre les deux plaques diminue davantage.

Je ne vous présente d'abord ici ce phénomène que dans ce qu'il a de plus général, mais il est modifié d'une infinité de ma-

nières qui toutes offrent des particularités remarquables. — Je vais en rapporter quelques-unes :

1° Tenant la première plaque contre l'œil, le plus grand côté *verticalement*, et la seconde plaque à 30 centimètres environ de distance, le plus grand côté *horizontalement*; alors, si l'observateur a la lumière d'une fenêtre en face, il verra, comme dans le premier cas, la seconde plaque avec ses trous et ses pleins, d'une grandeur proportionnée à son éloignement de l'œil; mais, en y faisant attention, il remarquera que les lignes des pleins, dans le sens *vertical*, sont plus noires et plus larges que celles dans le sens *horizontal*;

2° Tenant toujours la seconde plaque dans la même position et à la même distance, si on en approche lentement la première, on trouvera un point où les lignes des pleins dans les *deux* sens seront de même largeur; qu'en dépassant ce point, les lignes des pleins dans le sens *horizontal* deviendront plus fortes et seront mieux terminées, jusqu'à ce qu'on arrive à ne laisser entre les deux plaques qu'une distance d'environ 4 centimètres; alors on ne voit plus que de larges bandes *horizontales*, toutes les verticales ayant disparu;

3° Enfin, continuant à rapprocher les plaques, de manière à ne plus laisser entre elles qu'une distance d'un centimètre environ, on voit avec surprise reparaître les bandes *verticales*, et former avec celles *horizontales* des carrés réguliers, qui ne se détruisent plus alors, lors même qu'on met les plaques *en contact*, et qu'on les presse l'une contre l'autre. Si, dans la superposition des plaques, on ne met pas leurs côtés réciproquement perpendiculaires, on obtient, au lieu de carrés, des losanges; et, si on oblique la position d'une plaque sur l'autre encore davantage, on ne voit plus que des bandes parallèles.

Je pourrais vous donner le détail d'un grand nombre d'observations analogues que j'ai faites, en combinant les positions différentes de deux, de trois et même de quatre plaques, etc...., et en variant aussi, dans chacune d'elles, la distance et les diamètres des trous; je pourrais également vous détailler le résultat des expériences que j'ai faites pour examiner

la marche de la lumière directe du soleil, reçue dans une chambre rendue obscure et traversant des plaques de différentes formes, sous le rapport de la distance et de la dimension des trous. Mais l'ensemble de ce travail est long à décrire, surtout pour celui qui est dans l'impossibilité de s'en occuper d'une manière suivie ;.... et puisque l'obligation qui m'est imposée d'employer autrement mon temps, me détourne forcément et à mon grand regret des recherches et des spéculations scientifiques, je remets à un temps plus heureux de m'occuper des tentatives que j'ai le projet de faire encore pour compléter les matériaux qui doivent servir à la rédaction d'un mémoire détaillé sur ces phénomènes dont j'ai reconnu la canse, et qui donnent lieu à des formules qui expliquent et font même prévoir d'avance tout ce qui doit arriver.

Cependant, Monsieur, comme on peut combiner d'une infinité de manières différentes la position de plusieurs plaques, qui sont d'ailleurs susceptibles de varier dans la forme et la dimension des trous dont elle sont percées, un vaste champ est offert aux recherches et aux méditations des amateurs de l'analise appliquée, et il suffira bien certainement, pour les mettre sur la voie de s'en occuper, de donner dans votre *Correspondance* une simple notice de ce dont je me suis empressé de vous faire part (1).

La Haye, le 6 juillet 1828.

Formation artificielles des tubes fulminaires, extrait d'une lettre de M. HACHETTE de la faculté des sciences de Paris.

...... Vous aurez appris par les journaux que M. *Beudant* et moi avions fait artificiellement des tubes fulminaires d'une forme tout-à-fait pareille aux tubes naturels. M. *Beudant* a

---

(1) Nous présentons à nos lecteurs la lettre même de M. *Lipkens*, dans la crainte de nuire à la netteté de ses développemens par une rédaction qui n'aurait pu suppléer à la sienne. A. Q.

rendu compte de cette expérience à l'Académie royale des sciences, le 14 avril dernier. Le sable pur ou mélangé à sel marin (muriate de soude) n'a rien donné; mais du verre pilé pur ou mêlé à ce sel a été fondu par une forte décharge électrique. Nous nous sommes servis de deux machines électriques de feu *Charles*, déposées au conservatoire des arts et métiers, des diamètres de 14 et 16,3 centimètres; j'estime que la surface et la batterie composée de jarres ne s'éloignait pas beaucoup de 14 mètres carrés. L'électromètre, pendule en ivoire, marquait une tension d'environ 40 degrés....

. . . .

Sur la combustion du phosphore dans le vide pneumatique, extrait d'un Mémoire sur la combustion, communiqué par M. le docteur MAERTENS, de Maestricht.

Le degré de chaleur que les combustibles volatils exigent pour brûler, est moins élevé lorsqu'ils sont à l'état de vapeur qu'à l'état solide, parce que la cohésion des molécules étant détruite dans la vapeur, leur combinaison avec l'oxigène pourra plus aisément s'opérer. Ainsi la vapeur du phosphore brûle à la température ordinaire dans l'air atmosphérique; et voilà pourquoi ce corps est toujours lumineux dans l'obscurité par suite de la combustion de la vapeur qui s'en élève. Toutefois, cette vapeur n'ayant qu'une très-faible densité à la température ordinaire, ne développera pas en brûlant assez de chaleur pour enflammer le phosphore solide, autour duquel elle forme une auréole lumineuse; mais si l'on facilite, par quelque moyen que ce soit, la volatilisation de ce dernier, de manière à ce qu'il s'en élève une plus grande quantité de vapeur en un temps donné, alors celle-ci pourra, lors de sa combustion, mettre le feu au phosphore. On obtient ce phénomène en plaçant un morceau de phosphore sous une cloche pneumatique où l'on fait le vide; à mesure que l'on extrait l'air, le phosphore luit avec plus d'éclat et s'entoure d'une auréole lumineuse plus épaisse; un thermomètre sensible, plongé dans cette vapeur lumineuse, s'élève d'une manière très-marquée, ainsi que l'a

erv é M. *Van Marum* (*Ann. de Chimie*, t. 21); et si l'on a eloppé lâchement le phosphore d'un peu de coton sec, il nd ordinairement feu, lorsque la pression de l'air sous la he pneumatique n'est plus que d'un demi-pouce de mercure, donnant lieu à une combustion des plus curieuses. M. *Van rum* est, à ce que je sache, le premier qui ait décrit ce phénène (*Voyez* son Mémoire dans les *Ann. de Chimie*, t. 21). ense que l'inflammation du phosphore est due à ce que sa peur, qu'il se représente comme des molécules solides, ne t s'élever aussi-bien dans un air raréfié que dans l'air ordire, et que, restant concentrée autour de la surface du phospre, elle y développe en brûlant assez de chaleur pour ttre le feu à ce combustible; il croit du reste que l'influence coton consiste uniquement à empêcher la dissipation de la leur développée, et à maintenir ainsi la surface du phosphore e température plus élevée. Cette explication est loin d'être te, puisque la vapeur d'un corps quelconque se dissémine plus aisément dans le vide pneumatique qu'à l'air libre, ce que montre encore l'étendue de l'auréole lumineuse qui ure le phosphore et qui s'élargit à mesure qu'on fait le vide. tension et l'intensité de l'auréole indiquent évidemment formation plus abondante de vapeur phosphorique; il se eloppera donc autour du phosphore plus de chaleur dans raréfié qu'à l'air libre, conformément à l'expérience; et oton ralentissant plus ou moins la dissémination de la var du phosphore, et favorisant sa combustion par l'air qui ère mécaniquement, on conçoit que la chaleur développée l'étendue de l'auréole lumineuse pourra s'élever au degré uel le phosphore s'enflamme, et dès lors le corps doit prenfeu.

ervations sur la flamme, extraites du même Mémoire sur la combustion, par M. le docteur MAERTENS.

La flamme du suif, de la cire et en général de tous les liquides mbustibles, présente toujours dans son intérieur un espace

obscur plus ou moins étendu. C'est dans cet espace que se trouve plongé le bout de la mèche des chandelles; assez large vers sa partie inférieure, cet espace se rétrécit peu à peu vers le haut et se termine en pointe à une hauteur variable dans les différentes flammes.

Pour savoir d'où provient cet espace obscur, on n'a qu'à couper la flamme d'une chandelle horizontalement par une plaque de fer, tenue successivement à diverses distances du bout de la mèche, et l'extraire après un séjour de quelques secondes; on observe alors sur la plaque un enduit charbonneux circulaire, lorsqu'elle a été tenue dans la flamme au-dessus l'endroit où finit le cône obscur : cet enduit provient des particules de charbon, suspendues en grand nombre dans la flamme, et dont l'ignition est cause de le vive lumière qu'elle répand. Lorsque la plaque a été tenue dans le cône obscur lui-même, on y observe, après l'avoir retirée, un enduit graisseux circulaire, entouré d'un anneau de matière charbonneuse, d'autant plus large que la plaque a été tenue plus près du sommet du cône obscur. Le contraire s'observe dans les dimensions de l'enduit graisseux qui se réduit jusqu'à un point, lorsque la plaque a été tenue à l'endroit où le cône obscur se termine.

Ces expériences, que j'ai faites plusieurs fois, et toujours avec le même succès, nous montrent que les vapeurs du suif, dans la flamme des chandelles, ne prennent feu que lorsqu'elles sont arrivées à une certaine distance du bout de la mèche, et qu'il n'y a point de combustion au centre de la flamme. Même chose a lieu avec la flamme des autres liquides volatils. Cette disposition peut encore être rendue sensible, en abaissant horizontalement dans une flamme une toile métallique; on aperçoit alors, dans le principe, en plaçant l'œil au-dessus de la toile un disque entièrement lumineux; mais si on continue d'abaisser la toile, ce disque devient obscur à son centre, et on n'aperçoit plus alors qu'un cône tronqué de lumière, dont l'intérieur est entièrement obscur, et dont l'enveloppe extérieure est seule lumineuse, et d'autant moins épaisse que la

toile se rapproche davantage du bout de la mèche. On conçoit, d'après cela, qu'on pourrait plonger dans une flamme des corps très-combustibles sans qu'ils y prissent feu, pourvu qu'on eût la précaution de les plonger entièrement dans le cône obscur. Du phosphore, du soufre, plongés dans le cône obscur d'une flamme d'alcohol n'y brûlent pas. M. *Tilloch* a annoncé, dans le *Philosophical Magazine*, qu'il était parvenu à introduire de la poudre à canon, avec une spatule d'ivoire, dans la flamme d'une chandelle, et qu'elle était humide lorsqu'on l'en retira; il assure même avoir conservé de l'argent fulminant pendant plusieurs secondes dans le cône obscur de la flamme, sans qu'il détonnât. Nous concevons aussi maintenant pourquoi la mèche d'une bougie ou d'une chandelle, qui est toujours plongée dans l'espace obscur de la flamme, ne brûle ou ne se consume pas entièrement, quoiqu'elle soit très-combustible; pourquoi, étant devenue assez longue pour venir en contact avec la partie lumineuse de la flamme, son sommet se trouve alors brûlé et consumé.

Il nous reste à voir d'où vient ce défaut de combustion dans l'intérieur de la flamme. La plupart des physiciens pensent qu'il est dû à l'absence d'une suffisante quantité d'air qui, disent-ils, ne peut aisément pénétrer jusqu'au centre de la flamme. Cette opinion vient d'être confirmée par une expérience du chimiste anglais *Sym*. Un morceau de phosphore, placé dans le cône obscur, y fondit sans brûler. On introduisit ensuite dans la flamme, et tout près du phosphore, le bec d'un chalumeau, au moyen duquel on fournit un peu d'air dans l'intérieur de la flamme, le phosphore prit feu. On retira le chalumeau, et le phosphore s'éteignit. En redonnant de l'air, le phosphore brûle de nouveau. Cette expérience n'empêche cependant pas de croire que le défaut de combustion dans le cône obscur, ne dépende aussi du froid produit en cet endroit par la volatilisation du solide ou du liquide qui alimente la flamme, car il est difficile que la température de l'espace qui environne la mèche s'élève au-dessus du degré auquel le combustible se volatilise. D'ailleurs, on observe que la flamme d'un jet d'hydrogène

qui doit écarter l'air bien plus que la vapeur qui s'élève de la mèche d'une chandelle, n'offre cependant qu'un cône obscur très-peu étendu. J'ai remarqué aussi qu'en plongeant horizontalement dans le cône obscur d'une flamme de chandelle, un fil épais de fer chauffé au rouge-blanc, l'espace obscur diminuait instantanément, et la flamme prenait beaucoup plus d'intensité.

De l'action de l'électricité sur les aiguilles aimantées, par M. G. Dandelin, professeur à l'école royale des mines de Liége.

aba'b' est le plateau de verre d'une machine électrique. La surface vue de ce côté-ci était, lors de l'expérience, mise en communication avec le réservoir commun (*fig.* 5).

Les points *a* et *a'* sont les extrémités d'un diamètre vertical, et *b* et *b'* ceux d'un diamètre horizontal.

La figure 6 représente la projection horizontale du système.

J'ai pris une aiguille aimantée suspendue sur un pivot d'acier, communiquant au réservoir commun. J'ai placé cette aiguille d'abord aux points *a*, *b*, *a'*, *b'*; elle a pris une position immobile, sensiblement perpendiculaire au plan du plateau, et par conséquent est-ouest à cause de la position de la machine.

Je l'ai ensuite placée aux quatre points A, A', B, B', et ici s'est manifesté un singulier phénomène. Aux positions B, et B', l'aiguille est restée parallèle au plateau, mais changeant de pôles; tandis qu'aux points A et A' elle s'est mise à tourner avec une extrême rapidité, et ce qu'il y a de plus étrange, en sens contraire du mouvement du plateau : en sorte qu'au point A, par exemple, le plateau tournant de *a* en *b* (*fig.* 5), l'aiguille tournait (*fig.* 6) de *c* en *d*, tandis qu'au point A' l'aiguille tournait en sens contraire. On voyait, en faisant passer l'aiguille de l'un à l'autre point, son mouvement se ralentir, puis cesser absolument, puis enfin se prononcer et s'accélérer ensuite en sens contraire.

J'ai observé ensuite d'autres phénomènes, mais compliqués

de causes étrangères, trop nombreuses pour en faire le sujet d'une note. J'y reviendrai plus tard.

L'état atmosphérique contribue beaucoup à manifester ce phénomène. Le jour où l'expérience a réussi, le temps était brumeux, froid et sec : le baromètre indiquait 756 *mm* de pression.

Le lendemain l'expérience a réussi en partie ; mais au moment de 1 h. ½ le baromètre a descendu assez rapidement. La brume s'est dissipée en pluie, et dès lors presque tous les phénomènes ont cessé : cependant j'ai eu assez de temps pour essayer les mêmes actions dans une aiguille en cuivre ; mais quoique j'aie de fortes raisons de croire à ce qu'elle se comporterait comme l'autre dans quelque cas, je n'en parlerai pas davantage. D'ailleurs, le temps était devenu fortement hygrométrique, la pression atmosphérique avait changé, et le baromètre indiquait 748 *mm*.

Au reste, pour faire ces expériences, il faut une bonne machine : j'ai cependant réussi à produire des effets analogues depuis long-temps avec un bâton de laque.

Dériver le mouvement alternatif des tiroirs, glissoirs ou soupapes, qui, dans une machine à vapeur de construction ordinaire, admettent la communication entre la chaudière et le cylindre, et entre le cylindre et le condenseur; dériver le jeu de ces parties immédiatement du mouvement alternatif du balancier, par M. VERDAM, lecteur à l'université de Groningue (1).

Selon les circonstances, le jeu de ces parties leur doit être communiqué, d'une autre manière, ou par d'autres parties de la machine; ordinairement cela se fait au moyen d'un excentrique circulaire, attaché à l'axe du volant; autour de cet ex-

(1) Nous apprenons que M. *Verdam* vient d'être nommé professeur à la nouvelle école industrielle que l'on forme à La Haye. A. Q.



centrique, et dans une gorge, se meut un anneau de cuivre. auquel sont attachées deux tringles plattes, qui, en partant de l'axe du volant, concourent à l'autre extrémité de la machine, et sont fixées à une barre horizontale qui communique son mouvement de va et vient, par l'intermédiaire de manivelles et de tringles, aux glissoirs, soupapes, etc. Ceux qui connaissent la disposition d'une machine à vapeur, savent que souvent pour transporter le mouvement de l'excentrique à ces parties, principalement quand elles consistent en des tiroirs ou glissoirs, qu'on préfère avec raison aux soupapes, on a besoin de plusieurs tringles fortes et longues; mais indépendamment de ces tringles, l'appareil de l'excentrique demande toujours des tringles ou barres plattes d'une longueur égale à celle de la machine, et par ce motif, il n'est pas rare de voir des excentriques dans les fortes machines qui ont des barres, d'une longueur de 8 mètres et davantage. Si l'on peut éviter ces longues barres, et diminuer le nombre des autres tringles, en substituant un mécanisme non pas plus simple, mais plus resserré ou moins embarrassant, il est clair qu'on diminue un peu les frais de construction; cela peut avoir lieu par le mécanisme suivant, qu'on pourra employer dans bien des cas; cependant on doit considérer ceci plutôt comme la solution d'un problème de mécanique industrielle, que comme une simplification importante.

Soit AB (*fig.* 7), une partie du balancier, ABDC le parallélogramme, auquel est attaché la tige α du piston moteur, se mouvant dans le cylindre γ; β étant la caisse ou le compartiment dans lequel les glissoirs se meuvent, et dans lequel se porte la vapeur, en affluant du tube à vapeur δ. On sait que la pièce principale, par laquelle l'extrémité D du parallélogramme suit à peu près la verticale, est une barre horizontale CE, tournant autour du pivot ou du tourillon fixe E, etc. — On sait de plus que le point E se trouve ordinairement à côté de BD, quand AB est dans la position horizontale; c'est-à-dire, que les points E (car il y en a un de chaque côté du balancier) se trouvent dans le plan vertical, passant par la tige α, et perpendicu-

laire à la direction en longueur du balancier; on sait en outre que ce point E peut être porté en tel point de l'horizontale FEC qu'on voudra, pourvu qu'on change convenablement la longueur AB, ou la largeur AC du parallélogramme; tout cela s'effectue par une construction assez simple, et probablement connue des constructeurs instruits.

Posons donc que le point E soit porté en F, un peu en avant du parallélogramme, et que les barres CF (voyez *fig.* 8 et 9, les projections horizontale et verticale du mécanisme) ne tournent pas autour de tourillons; mais qu'elles soient fixées à une barre ronde FF, laquelle tourne dans deux coussinets G, G. Cette barre aura donc un mouvement circulaire alternatif par le mouvement alternatif des barres CF; elle ne doit supporter qu'un poids peu considérable; donc elle peut être aussi mince, sans s'infléchir, que sa longueur le permet (1).

Au milieu de FF est fixé un petit cercle excentrique *e*, embrassé par un anneau dans lequel il peut tourner librement, comme cela se pratique avec l'excentrique ordinaire; la tige *ed* de cet excentrique repose dans un collier *d* (*fig.* 7, 8 et 9) (la figure 9 étant une élévation de côté), au milieu d'un petit axe *ii*, aux extrémités duquel tiennent les léviers verticaux *ic*, fixés également à l'axe horizontal *cc*, de manière que l'axe *cc* tournera, quand les léviers *ic* seront mis en mouvement. Au milieu de *cc* est fixé le bras de lévier *cb*, qui tient en dernier lieu à la tige *ab* des tiroirs ou des glissoirs.

D'après cette description, il est clair que par la rotation alternative de l'axe FF, l'excentrique oscillera dans son anneau, et que sa tige *ed* aura un mouvant de va et vient, par lequel la tige *ab*, et par suite, les glissoirs, reçoivent leur

(1) Si l'on ne voulait pas changer la position des tourillons E, (*fig.* 7), on pourrait faire tourner la barre FF au moyen d'un petit arc denté H (*fig.* 8*), fixé au prolongement de CE, et engrenant dans une roue attachée à l'axe FF; mais cela augmente les parties du mécanisme inutilement, parce qu'il n'y a pas de raison pour que le point de rotation des barres CE doive être plutôt en E qu'en F.



mouvement de haut en bas, et de bas en haut. Faisons à présent quelques remarques.

1° Les glissoirs devant se mouvoir, tant en haut qu'en bas, pendant que le piston fait une course, l'on ne saurait produire ce mouvement sans excentrique, d'une manière plus simple; si le mouvement de *ab* était isochrone avec celui de la tige du piston moteur, on pourrait prolonger CF au delà de F jusqu'en *b*, et attacher la tige *ab* immédiatement à CF; mais la loi du mouvement des glissoirs ne permet pas un arrangement aussi simple. L'excentrique étant attaché à l'axe FF, on voit la raison pour laquelle le point E (*fig.* 7), doit être transporté en F; autrement l'excentrique serait gêné par l'axe horizontal D, qui porte en son milieu la tige du piston. — L'excentrique peut être d'une petitesse extrême, même pour les plus fortes machines, et chacun concevra qu'il est fort aisé de régler l'excentricité, la longueur de *ed* et des leviers *dc*, *cb*, de manière que les oscillations de l'excentrique produisent justement la course que doivent avoir les glissoirs, cette course se déduisant des dimensions de la machine, et n'étant, pour les machines moyennes de 12 à 24 chevaux, guère plus grande qu'un décimètre; ainsi je ne m'arrête pas davantage aux longueurs des pièces, qui seront toujours incomparablement plus petites et en moindre nombre que celles de l'arrangement ordinaire.

2° L'axe *ii* est libre; mais *cc* est fixe, ainsi il doit y avoir à la hauteur *cc* deux supports fixes. Les grandes machines à deux colonnes, de même que les machines à six colonnes, portatives, présentent presque toujours des moyens faciles de fixer ces supports au châssis supérieur de la machine ou aux colonnes; mais pour les machines portatives à deux colonnes, on doit fixer ces supports au moyen de deux petites colonnes *cf* (*fig.* 8 et 10), au couvercle du compartiment *β*.

3° La tige *ab* doit avoir un mouvement exactement vertical, ou du moins aussi exact qu'il se peut. On obtient cela de la manière suivante :

a. Quand le bras de levier *cb* (*fig.* 8 et 9*), est terminé en fourche *b*, ayant de chaque côté deux trous pour recevoir le

petit joug auquel pend la tige *ab*, et que ces trous sont ovales et plus larges que le diamètre du joug (comme l'indique la *fig.* 8), il est clair que, par ce jeu, la déviation de l'extrémité *b* de la verticale ne pourra causer une déviation de *ab*. Cet arrangement serait imparfait, et les trous ovales s'useraient bientôt, si la course de *ab* était très-grande; mais comme elle est fort petite, je suis porté à croire qu'on pourrait adapter cet arrangement aussi bien aux grandes machines qu'aux moyennes.

b. Cependant on pourrait, dans les grandes machines, joindre le bras *cb* à la tige *ab*, par une tige intermédiaire *ab* (*fig.* 12) à deux articulations *a*, *b*.

c. Ou bien, ce qui serait mieux encore, attacher un petit parallélogramme au bras *bc*; ce parallélogramme n'augmente pas beaucoup la difficulté de construction, à cause de sa petitesse; mais il exige un point fixe de plus. Enfin, on pourrait employer telle autre combinaison connue de tringles par lesquelles la verticalité désirée s'obtiendrait.

d. Toutefois, la verticalité s'obtient par un arc denté (*fig.* 11), engrénant dans la tige *ab*, terminée à cet effet en crémaillère. Le mouvement de *ab* étant fort lent, et les dents de l'engrénage n'ayant presque rien à porter, à cause du contrepoids *gh* (*fig.* 8), il est évident que le mouvement sera exact, facile, et sans que les dents s'usent beaucoup, par le changement alternatif du mouvement. Mais on ne peut pas dire que cet arrangement soit le plus simple.

e. Enfin, si l'on est libre de donner au bras *cb* une longueur d'un mètre, par exemple, l'arc décrit par l'extrémité *b* ne s'éloignera pas beaucoup de la verticale, et l'on pourra toujours employer une fourche *b* (*fig.* 8 et 9*), à trous ovales, et même à trous ronds (qui ne s'usent presque pas sensiblement), si la longueur de *ab* est aussi d'un mètre au moins.

4° Le contrepoids *gh* doit être prolongé en bas, afin que le machiniste puisse le saisir pour mettre la machine en mouvement; en même temps il doit faire sortir la tige de l'excentrique de son collier *d* (*fig.* 8 et 10), ce qui peut se faire par un bâton fourchu, ou par une corde passant sur une poulie de renvoi *p*.

STATISTIQUE.

Journaux des provinces septentrionales du Royaume (1).

HOLLANDE SEPTENTRIONALE. *Amsterdam.* Godsgeleerde Bijdragen; Nieuw Christelijk maandschrift; Bijdragen tot de Natuurkundige wetenschappen; Schei-, Artsenijmeng- en Natuurkundige bibliotheek; Tijdschrift voor genees-, heel-, verlos- en scheikundige wetenschappen; Bijdragen tot de regtsgeleerdheid; Verzamelingen van decisien; Algemeen handelsblad; Amsterdamsch beursblad; Liefde en hoop; De Nederlandsche Hermes; De vriend des Vaderlands; Cybele; Algemeene Vaderlandsche letteroefeningen; Amsterdamsch letterlievend maandschrift; Boekzaal; Letterkundig magazijn; Magazijn voor wetenschap; Recensent ook der Recensenten; Penelope; Philopœdion; De Arke Noachs; Bulletin der algemeene letterkunde; De Echo; De gekortwiekte Faam; Keur van nuttige en aangename mengelingen; Naamlijst van nieuw uitgekomen boeken; Naamlijst van boeken; De Naprater; Amsterdamsche courant; Zeetijdingen; Prijs courant; De bloemkorf; 33.

Harlem. Algemeene kunst- en letterbode; Haarlemsche courant; 2.

Alkmaar. Alkmaarsche courant; 1.

HOLLANDE MÉRIDIONALE. *Rotterdam.* Hippocrates; Apollo; De Fakkel; Maandboekje van Rotterdam; Rotterdamsche courant; 5.

La Haye. De Godsdienstvriend; De Buitenman; De Mentor;

---

(1) Nous devons à l'obligeance de M. *Somerhausen*, l'indication des journaux de la Hollande, qui vient de paraître aussi dans la *Revue encyclopédique* du mois d'avril.

De Pœdagog; Maandboekje van 's Gravenhage; Staats courant; Dagblad van 's Gravenhage; Nieuws- en advertentieblad (plusieurs journaux paraissent à la fois à la Haye et à Amsterdam); 8.

Leyde. De Weegschaal; Nieuwe bijdragen ter bevordering van onderwijs; Maandboekje van Leyden; Leydsche courant; 4.

Dordrecht. De Protestant; Mnemosijne; Dordrechtsche courant; 3.

Gorinchem. Practisch tijdschrift; 1.

Delft. Geneeskundige bijdragen; 1.

BRABANT SEPTENTRIONAL. *Bois-le-Duc*. De Christelijke Mentor; Dagblad van 's Hertogenbosch; Dagblad van de Provincie; 3.

Breda. Tijdschrift ter bevordering der phijsiologische genees en heelkunde; Bredasche courant; 2.

ZÉLANDE. *Middelbourg*. Maandblad van Middelburg; Tijdschrift ter bevordering van algemeene kundigheden; Middelburgsche courant; 3.

Zierikzee. Maandblad; Dagblad van Zierikzee; 2.

Goes. Maandblad van Zuid- en Noord-Beveland; Dagblad van Tergoes; 2.

Sluis. Lettervruchten; 1.

GRONINGUE. *Groningue*. Vee-artsenijkundig magazijn; Antiquiteiten; Groningsche courant; Dagblad der Provincie Groningen; 4.

FRISE. *Leeuwarden*. Leeuwardsche courant; 1.

UTRECHT. *Utrecht*. Euphonia; Utrechtsche courant; 2.

GUELDRE. *Arnhem*. Arnhemsche courant; 1.

Zaltbommel. De Rozenstruik; 1.

Nymègue. Nymeegsche courant; 1.

OVERYSSEL. *Zwolle*. Zwolsche courant; 1.

DRENTHE. *Assen*. Dagblad der provincie Drenthe; 1.

DUCHÉ DE LUXEMBOURG. *Luxembourg*. Journal de Luxembourg; *Luxemburger Wochenblatt*; 2.

Il résulte de ce qui précède que les provinces septentrionales comptent 83 écrits périodiques, dont 58 s'impriment dans

les deux Hollandes. Notre royaume entier possède donc 152 écrits périodiques. (*Voyez* page 193 de ce vol.)

Voici maintenant le relevé de ce que les journaux timbrés ont rapporté au trésor en 1826 :

PROVINCES.	JOURNAUX TIMBRE.	INDIGÈNES. FEUILLES.	JOURN. TIMBRÉ.	ÉTRANGERS. FEUILLES.
Hollande septentrion[le].	44,124	2,206,200	4,220	105,500
Hollande méridionale.	14,518	725,900	3,080	77,000
Brabant septentrional.	799	39,950	258	6,450
Zélande.	1,642	82,100	20	500
Frise.	5,730	286,500	83	2,075
Utrecht.	1,200	60,000	355	8,875
Gueldre.	2,733	136,650	370	9,250
Overyssel.	742	37,100	126	3,150
Drenthe.	176	8,800	5	125
Groningue.	3,129	156,450	29	725
Luxembourg.	224	11,200	166	4,150
	75,017	3,750,850	8,712	217,800

Afin de rendre les résultats comparables à ceux qui ont été donnés dans le cahier précédent, les calculs ont été faits de la même manière, quoiqu'on ait observé avec raison qu'il en résultait que le nombre des feuilles était trop faible. M. *Dupin* a fait des calculs semblables pour la France, où le produit du timbre des journaux a été de 351,154 francs en 1826. Ce savant a déduit de là que le nombre des feuilles imprimées était de 26,420,520, en comptant à raison de 1 centime ²/₃ la feuille; ce qui nous paraît une évaluation trop faible dans un autre sens. Sur ce pied, notre pays, où le droit du timbre est le même qu'en France, aurait dû produire 21,900,000 feuilles environ. Les papiers publics ont annoncé que le nombre des journaux timbrés s'est élevé, en 1826, pour l'Angleterre et le pays de

Galles, à 25,684,003 feuilles; pour l'Écosse, à 1,296,549, et pour l'Irlande, à 3,473,014. D'après ces calculs, *les Pays-Bas possédaient 60,000 feuilles de journaux environ par jour, ou 60,000 abonnés par an; la France 72,380, et l'Angleterre 70,370: c'est 1 abonné pour 100 individus dans les Pays-Bas, 1 pour 437 en France, et 1 pour 184 en Angleterre.*

Imprimerie à Bruxelles.

On pourra prendre par le tableau suivant une idée de l'importance que le commerce de la librairie a pris à Bruxelles dans l'espace de peu d'années :

ANNÉES.	FONDERIES.	OUVRIERS FOND^rs.	IMPRIMERIES.	PRESSES.
1815	2	7	20	27
1816	3	10	20	27
1817	2	14	22	31
1818	3	20	25	36
1819	3	24	29	39
1820	3	33	31	43
1821	3	37	33	47
1822	3	37	35	52
1823	3	43	36	55
1824	3	43	36	57
1825	4	52	37	64
1826	4	65	41	74
1827	5	76	40	83
1828	5	66	40	84

Chaque presse peut donner 1000 et même 1200 feuilles imprimées par jour; et si l'on n'en compte, terme moyen, que 500 et 300 jours de travail par an, on trouve que *Bruxelles seule imprime actuellement* 12,600,000 *feuilles par an, le dixième de*

ce qu'imprimait toute la France en 1825, *d'après les calculs de M. Daru.*

Le nombre des presses a toujours été plus considérable que celui indiqué dans le tableau précédent, qui ne fait connaître que les presses en activité. Plusieurs imprimeries n'ont qu'une seule presse, quelques-unes même ne travaillent qu'avec un seul ouvrier, nous les avons fait entrer alors dans nos calculs comme n'ayant qu'une demi-presse.

La lithographie, qui compte à peine quelques années d'existance, a déjà fait naître à Bruxelles 16 établissemens qui renferment 37 presses et occupent 107 ouvriers, sans comprendre dans ce nombre presqu'autant d'enlumineuses.

Bruxelles n'avait du temps de l'empire que 8 imprimeurs brévetés, qui faisaient travailler une douzaine de presses, d'où sortaient, outre les affiches et les papiers administratifs, autant d'ouvrages originaux qu'en fournirait aujourd'hui en une semaine un de nos principaux ateliers.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, tom. IV, in-4°; Bruxelles, Hayez 1827.

Le volume des Mémoires que l'académie vient de faire paraître est le quatrième de la collection; il se compose de seize mémoires, dont trois seulement appartiennent à la classe des belles-lettres. Nous tâcherons de donner ici un aperçu sommaire de leur contenu.

M. *Dandelin* a présenté deux mémoires, l'un *sur les intersections de la sphère et d'un cône du second degré;* l'autre, *sur* l'emploi des projections stéréographiques en géométrie. L'auteur a résolu avec beaucoup d'élégance un grand nombre de problèmes sur les courbes du deuxième degré; il a fait connaître en même temps plusieurs propriétés de ces lignes. Sa méthode consiste principalement à régulariser par la projection les figures dont il veut étudier les propriétés, et s'appuie à cet effet sur ces deux théorèmes que les angles et les cercles ne se dénaturent point par la projection stéréographique, et que le pôle d'un cercle sur la sphère devient le centre du même cercle projeté sur le plan. Le second mémoire a été imprimé en grande partie dans la *Correspondance*, tom. II.

M. *Quetelet* a donné trois mémoires dont nous nous bornerons à énoncer les titres : 1° *Sur différens sujets de géométrie à trois dimensions;* 2° *Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques, suivi de différentes applications à la théorie des projections stéréographiques;* 3° *Recherches sur la population, les*

naissances, les décès, les prisons, etc., dans le Royaume des Pays-Bas.

Dans un mémoire *sur l'équilibre des systèmes flexibles*, M. *Pagani* a traité en analiste exercé plusieurs problèmes de mécanique fort intéressans. Nous emprunterons ses propres paroles pour faire connaître son travail : « L'objet de ce mémoire est de considérer l'équilibre des systèmes flexibles non élastiques, en ayant égard à une seule dimension, ou aux deux dimensions à la fois, ce qui fournit des systèmes flexibles *linéaires* ou des *polygones funiculaires*, et des systèmes flexibles superficiels ou des *réseaux funiculaires*. La chaînette et une foule d'autres courbes sont des cas particuliers des systèmes linéaires, tandis que les surfaces flexibles sont des cas particuliers des systèmes superficiels. Ainsi, je divise le mémoire en deux paragraphes : je traite des système linéaires dans le premier; des systèmes superficiels dans le second, et je donne enfin, comme application des formules générales, l'équation différentielle de la surface d'une bulle d'air qui monte à travers une masse liquide homogène. »

M. *Vanderlinden* a donné une notice intéressante sur une empreinte d'insecte de la famille des *libellulines*, renfermée dans un échantillon de calcaire schisteux de Sollenhoven, en Bavière ; et un mémoire *sur les hyménophtères d'Europe, de la famille des fouisseurs*. On doit à M. *Van Mons* des observation curieuses sur les brouillards de différentes natures, et à M. *Kickx* une série d'observations météorologiques faites à Bruxelles, pendant les années 1825 et 1826. M. *Cauchy* a présenté des renseignemens sur la pierre calcaire, fournissant une chaux hydraulique, que l'on extrait dans une carrière ouverte au lieu dit Humérée, et sur quelques autres pierres calcaires analogues.

M. *Ampère*, dans un mémoire *sur l'action mutuelle d'un conducteur voltaïque et d'un aimant*, a discuté, par une savante analise, plusieurs phénomènes de la théorie électro-dynamique, au perfectionnement de laquelle ses ingénieuses recherches ont si puissamment contribué.

M. *Hachette* s'est occupé d'un problème de géométrie à trois dimensions, dont M. *Bruno*, de Naples, avait également donné une solution (Voyez la *Correspondance*, tom. III).

M. *Hachette*, dont les ouvrages sont entre les mains de toutes les personnes qui veulent approfondir la géométrie à trois dimensions, a discuté les différens cas que présentait ce problème intéressant; et il a enrichi son travail de recherches historiques que les savans liront avec intérêt. Il a donné aussi quelques nouveaux éclaircissemens sur une difficulté que présente la géométrie descriptive de *Monge*, et qui avait déjà donné lieu à une première rectification.

On trouve encore dans le même volume deux mémoires historiques de M. *Raoux*, et un de M. *Dewez*, secrétraire perpétuel de l'académie, ainsi que le journal des séances. M. le prince *De Gavre*, président de l'académie, s'est rendu le digne interprète des regrets qu'à fait naître la mort de M. le commandeur *De Nieuport*, l'un des plus anciens membres et des plus justement estimés pour la noblesse de son caractère et pour ses profondes connaissances dans les sciences mathématiques (1).

Suite de l'analise de la théorie élémentaire des transversales; par M. Garnier, professeur à l'Université de Gand.

En revenant sur le chapitre IX, analisé (IIe livraison, t. IV), nous avons reconnu que, dans les quatre premiers théorèmes, nous avions conclu, peut-être trop brusquement, d'un petit nombre de cas particuliers et très-simples, à la propriété générale énoncée, surtout si l'on considère que les constructions sur lesquelles on se fonde, se modifiant lorsqu'on passe d'un

---

(1) Nous ne tarderons pas à donner une notice sur ce savant respectable, ainsi que les notices sur les observatoires d'Angleterre, que nous avions promises précédemment; mais que des occupations particulières ne nous ont pas permis de terminer encore. A. Q.



nombre impair à un nombre pair de côtés, il ne suffit plus, pour en faire comprendre l'esprit, de les suivre du triangle au quadrilatère : nous avons donc cru devoir considérer encore le pentagone, et dès lors, il devient facile d'étendre à tous les cas et les procédés de construction et la marche de raisonnement. Nous ne citerons que ces additions comme étant les plus importantes.

Chap. x. *Des pôles et polaires. Application de cette théorie.*

Peut-être, en partant de cette observation que la détermination du pôle est liée à la division harmonique d'une droite, trouvera-t-on qu'il eût été plus convenable de reporter à la fin du second chapitre les notions exposées dans celui-ci : c'est, au reste, une transposition qu'il nous suffira d'indiquer aux lecteurs, si nous en avons. Nous avons établi les notions de pôles, pôles conjugués, polaires, etc., sur le cercle, notions qu'on transportera aux coniques, en observant, par exemple, que la perspective du pôle est le pôle de la perspective. Cette théorie est presque tout entière renfermée dans cet énoncé qui résulte du théorème Ier : *Si un certain point est situé sur une certaine droite tracée dans le plan, soit d'un cercle, soit d'une conique, la polaire de ce point passera par le pôle de cette même droite.* Les théorèmes II, III, IV.... VII, sont relatifs au pôle d'un plan, au plan polaire d'un point, à la polaire conjuguée d'une droite, aux polaires conjuguées d'un cône, du cylindre, au pôle et aux pôles conjugués d'un cercle tracé sur la surface d'une sphère; au pôle d'un arc de grand cercle, à son arc polaire. Viennent ensuite quelques applications : « 1° Dans la parabole, la droite qui divise également toutes les distances entre un point quelconque » et sa polaire, est une tangente à la courbe. 2° Lorsque trois » points situés sur le plan d'une hyperbole équilatère sont tels » que chacun d'eux est le pôle de la droite qui contient les deux » autres, le cercle qui passe par ces trois points, passe aussi par » le centre de la courbe. 3° Si l'on mène quatre tangentes quelconques à une hyperbole équilatère, le centre de la courbe » sera situé sur la circonférence qui passe par les trois points

» d'intersection des diagonales du quadrilatère complet, formé » par ces tangentes; ou, en d'autres termes, les centres de » toutes les hyperboles équilatères tangentes à quatre droites » quelconques, sont situés sur la circonférence d'un cercle unique qui passe par les trois points d'intersection des diagonales » du quadrilatère complet, formé par ces quatre tangentes. 4° Décrire une hyperbole équilatère dont on a quatre tangentes. » 5° A une section conique, inscrire un polygone de *m* sommets » dont les côtés prolongés, s'il est nécessaire, passent par un » même nombre de points donnés, pris arbitrairement; en second lieu, à une section conique donnée, circonscrire un » polygone de *m* côtés, dont les sommets s'appuient respectivement sur un même nombre de droites données, tracées » arbitrairement dans son plan. » Nous ne traitons avec détail que le cas du triangle, soit inscrit, soit circonscrit, et nous donnons de chacun plusieurs solutions fondées sur des principes différens; enfin, nous exposons et nous motivons suffisamment les procédés graphiques indiqués par M. *Poncelet*, pour la résolution des deux questions générales énoncées; suit la démonstration de ce théorème : « 1° Deux triangles circonscrits » à une même ligne du second degré, sont, par cela seul, circonscriptibles à une autre ligne de ce degré. 2° Deux triangles circonscrits à une même ligne du second ordre, sont, » par cela seul, inscriptibles à une autre ligne du même ordre. » Ce théorème offre des corollaires remarquables. Au moyens de ce qui précède, on résout facilement ces deux questions : « 1° A un cercle donné sur une sphère, inscrire un » triangle sphérique dont les côtés passent par trois points » donnés sur la sphère. 2° A un cercle décrit sur la sphère, » circonscrire un triangle sphérique dont les sommets soient » situés sur trois arcs de grands cercles donnés sur cette sphère. » Questions qu'on peut généraliser.

Nous arrivons enfin à l'importante doctrine des polaires réciproques, contenue dans ces théorèmes : « 1° Si un point pris » arbitrairement dans le plan d'une ligne du second ordre » se meut en parcourant une ligne du même ordre, la polaire

» de cette dernière enveloppera dans son mouvement une » ligne droite de cet ordre, et réciproquement. 2° Si, en » un point quelconque d'une ligne du second ordre, on lui » mène une tangente, la polaire de ce point touchera la courbe » enveloppée par les polaires, en un point qui sera le pôle de » cette tangente. 3° La polaire réciproque d'une courbe don- » née sur le plan d'une section conique, est, à la fois, le lieu » des pôles de toutes les tangentes à cette courbe, et l'enve- » loppe de l'espace parcouru par les tangentes à la première » courbe, » ou, en d'autres termes, « une courbe quelconque » étant donnée sur le plan d'une conique, celle sur laquelle » roule, dans son mouvement, la courbe de contact de l'angle » mobile et variable de position, circonscrit à cette conique, » est aussi celle que devrait décrire le sommet d'un autre » angle circonscrit à la conique, pour que l'enveloppe de » l'espace parcouru par la courbe de contact fût la première » courbe elle-même. » Cet échange de propriété a fait donner à ces deux courbes le nom de *polaires réciproques;* la courbe intermédiaire a été dite *directrice*. La polaire réciproque d'une courbe du second degré sera une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, suivant que le centre de la directrice sera situé au dedans de la section conique, sur cette section elle-même, ou au dehors; et comme il est plus facile de suivre des propriétés sur des figures que de lire les figures dans les propriétés, nous avons eu soin d'effectuer toutes les constructions. En conséquence des propriétés qui existent entre ces polaires réciproques, on a, entre les deux figures, une série de relations qu'à la manière de M. *Gergonne*, nous avons consignées, en regard l'une de l'autre, dans un tableau à deux colonnes, et nous en avons fait autant pour les surfaces polaires réciproques du second ordre : l'une de ces dernières trouve son emploi dans le théorème suivant : « Par deux cercles décrits sur une sphère, on » peut toujours faire passer deux systèmes de droites formant » deux cônes, dont les sommets sont situés sur la droite qui » joint les pôles de ces deux cercles, c'est-à-dire, les sommets » des cônes circonscrits à la sphère, suivant les cercles don-

» nés (1) » Enfin, nous terminerons ce chapitre très-étendu, ainsi que l'exige son importance, par une suite de remarques et de théorèmes qui forment une extension du théorème XII (chap. VI), aux surfaces du second ordre, dans laquelle on trouve, au moins implicitement, toute la doctrine des pôles, polaires, polaires conjuguées ou réciproques, ensorte qu'il ne reste plus qu'à énoncer les résultats au moyen des dénominations nouvellement adoptées. Cette partie est empruntée du Mémoire de M. *Brianchon* (XIII[e] cah. du *Journ. de l'École Polyt.*, avril 1806). Dans une addition à ce chapitre, nous avons donné des solutions nouvelles de quelques questions déjà traitées, et fait remarquer une dépendance entre les hexagones inscrits et circonscrits, qui peut avoir quelques applications, et qui, au moins, donne lieu à quelques remarques assez curieuses.

Instructions Populaires sur le calcul des probabilités, par M. A. QUETELET, avec cette épigraphe : *mundum numeri regunt;* à Bruxelles, chez Tarlier et Hayez (2).

Suivant les anciens, la probabilité n'était autre chose que la vraisemblance, espèce d'apparence qui ressemble à la vérité, comme certain portrait ressemble à l'original : aujourd'hui, on définit *la probabilité* ce qui doit arriver dans le plus grand nombre de cas; ce qui résulte du plus grand nombre de chan-

(1) Ce théorème appartient à M. le professeur *Dandelin* qui l'a démontré à sa manière dans son *mémoire sur les projections stéréographiques :* M. *Gergonne* ayant observé qu'il est à regretter que l'auteur s'appuie sur une formule des transversales, M. *Quetelet* a cherché une autre démonstration de cette proposition, qu'on trouve *Corr. Math. et Phys.*, t. III, p. 13 : nous en avons ici conservé le fonds. J. G. G.

(2) Je n'ai pas cru devoir supprimer cet article, malgré l'indulgence qui a présidé à sa rédaction, parce que je pense qu'on me fera la justice de croire que je l'aurais inséré également, s'il avait renfermé un jugement qui m'eût été défavorable. A. Q.

ces; ce qu'on peut affirmer par plus de raisons qu'on en a de le nier; enfin, ce dont la probabilité mathématique surpasse $\frac{1}{2}$, quand la certitude est figurée par l'unité. Dans un ouvrage ayant pour titre : *Doutes et questions*, *Dalembert* a attaqué ce calcul : les géomètres qui n'ont pas cet écrit sous la main, pourront jeter les yeux sur la *page* 331 *du tom. III des opuscules mathématiques d'Euler*, dont nous extrairons le passage suivant : « *Neque me deterrent objectiones illustris Dalemberti, qui hunc calculum suspectum reddere conatus est : postquam enim hic summus geometra studiis mathematicis valedixit, iis etiam bellum indixisse videtur, dum pleraque fundamenta solidissime stabilita evertere est aggressus. Quamvis enim hæ objectiones apud ignaros maximi ponderis esse debeant, haud tamen metuendum est ipsi scientiæ ullum detrimentum afferri posse.* » Au reste, tout ce qu'on peut raisonnablement demander à *ces ignorans*, en mathématiques bien entendu, c'est qu'ils imitent la réserve des aveugles sur le chapitre des couleurs. Nous étions déjà en possession d'un grand nombre de traités à l'usage des seuls géomètres, sur le calcul conjectural (1); lorsque M. *Quetelet* eût l'heureuse idée de composer *une arithmétique des probabilités*, qui n'exige que la connaissance des propriétés des fractions et des proportions, et celle du calcul décimal : en lisant et après avoir lu ce petit traité, je ne pouvais m'expliquer comment il s'était fait attendre jusqu'ici. Il me semble que l'auteur avait eu l'intention de diviser son livre en deux parties : la première aurait compris les neuf premières leçons,

(1) Le [illegible] chapitre de mon *Analise algébrique*, ouvrage de 668 pages, imprimé à Paris, en 1814, a pour titre : *Théorie Élémentaire du calcul des probabilités*; outre les traités généralement connus sur cette matière, j'ai consulté le beau Mémoire de *La Grange*, inséré dans les *Mélanges de la société Royale de Turin, pour les années* 1770—1773, ayant pour titre : *de l'utilité de prendre le milieu entre les résultats de diverses observations, etc.*; un Mémoire de M. *Ampère*, sur les *Jeux de hasard*, imprimé à Lyon, et enfin les *Annales mathématiques* de M. *Gergonne*.

c'est-à-dire, *les principes*, et la seconde les dix dernières, sous le titre *d'applications*. Chaque chapitre est terminé par une série de questions qui en sont comme le résumé; c'est ainsi qu'il en a usé dans *son Astronomie Populaire*. Nous nous porterons de suite à la septième leçon ayant pour titre: *sur la manière dont il faut envisager le calcul des probabilités;* c'est une réponse nécessaire à toutes les objections contre ce calcul, qui, généralement parlant, est en défaut pour des cas particuliers; mais si l'on fait un très-grand nombre d'épreuves, l'accord tend à s'établir de plus en plus entre ce calcul et l'expérience; l'auteur donne la règle de *Bernouilli*, d'où il tire cette conclusion: il est donc peu prudent de s'exposer aux chances d'un hasard qu'on ne peut tenter un grand nombre de fois. Les huitième et neuvième leçons traitent, la première de *l'espérance mathématique*, et la seconde de *l'espérance morale:* on nomme *espérance mathématique*, le produit *d'une somme qu'on espère, par la probabilité de l'obtenir*, ainsi pour qu'un pari soit équitable, il faut que les espérances mathématiques des deux joueurs soient égales. Mais lorsque l'espérance mathématique dépend de plusieurs événemens, on l'obtient en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque événement par le bien attaché à son arrivée. On nomme *espérance morale, le produit de la valeur morale ou relative d'une somme par la probabilité de l'obtenir, et la valeur morale ou relative d'une somme, ou son importance, est le quotient de cette somme par le bien que possède la personne qui l'expose*. Ces deux chapitres offriront au lecteur des notions très-nettes sur deux points délicats et fondamentaux de la théorie des probabilités. Dans la dixième leçon, *des loteries*, l'auteur débute ainsi: l'avantage du banquier au jeu des loteries, consiste en ce que son espérance mathématique est généralement beaucoup plus forte que celle des joueurs, et en ce qu'il s'assure la jouissance de cet avantage, par le grand nombre de tirages qui ont lieu. L'auteur s'occupe d'abord de la *loterie génoise*, ou *loterie royale de France*, et ensuite de celle *des Pays-Bas*, ou *loterie hollandaise*: par rapport à cette dernière, il trouve que la véritable valeur

du billet de 46 florins se réduit à 35,86; la différence savoir 10,14, se distribuant entre le trésor qui reçoit 4,14, et les collecteurs qui retiennent 6 florins. On peut, dit-il, assimiler le billet de cette loterie à une marchandise qui aurait une valeur intrinsèque de 35,86 florins, et que l'on vendrait 46 florins en gros et 48 en détail. Dans ce qui précède, on était supposé pouvoir estimer le nombre des chances, tant favorables que contraires aux événemens dont on cherchait les probabilités, et conséquemment le nombre total des chances; mais il n'en est plus ainsi dans les onzième et douzième leçons, qui ont pour titres, la première : *du calcul de la probabilité, quand on ne connaît pas le nombre des chances favorables*, et la seconde: *du calcul de la probabilité, quand le nombre des chances est inconnu*. Dans le premier énoncé, on connaît le nombre total des chances, et il s'agit de découvrir l'un de ses élémens, savoir le nombre des chances favorables, ce qui donne lieu à ces deux questions : Calculer 1° les probabilités des causes des événemens; 2° la probabilité d'un nouvel événement, d'après les événemens passés; dans le second, on ne connaît ni le nombre des chances favorables à l'arrivée de l'événement, ni le nombre total des chances, ce qui donne lieu à ces trois questions : Calculer 1° la probabilité qu'un événement qu'on a observé plusieurs fois de suite, se reproduira encore une fois; 2° la probabilité qu'il existe une cause qui facilite la reproduction d'un événement, qui a été observé plusieurs fois de suite; 3° la probabilité qu'un événement qu'on a observé plusieurs fois de suite, se reproduira encore un nombre donné de fois; 4° la probabilité que sur deux événemens qu'on a observés, l'un se reproduira. Les treizième et quatorzième leçons portent *sur la manière de prendre des résultats moyens, et sur la mesure du degré d'approximation de ces résultats, ou règle des moindres carrés*. Enfin, les quinzième, seizième, dix-septième et dix-huitième leçons contiennent des applications du calcul des probabilités *à la vie humaine, aux assurances et rentes viagères, à la probabilité des témoignages, aux décisions des tribunaux et aux élections*. Ces spéculations, du plus haut intérêt, sont

présentées avec beaucoup de netteté, et mises à la portée de tout lecteur qui s'est approprié les leçons précédentes. Cependant, nous ne souscrivons pas au titre de l'ouvrage : *Instructions Populaires sur le calcul des probabilités* ; nous craignons que l'auteur n'ait pris ici une *facilité relative* (de la matière) pour une *facilité absolue* : c'est la seule inexactitude que nous ayons rencontrée dans son excellent ouvrage, que nous nous proposons de prendre pour l'un des textes de notre enseignement académique. J.-G. GARNIER.

Journal für die reine und angewandte mathematik, in Zwanglosen heften. Journal pour les mathématiques pures et appliquées, par *A. L. Crelle*, in-4°; Berlin, chez Duncker et Humblot, 1826—27—28.

Quoique les connaissances mathématiques soient plus répandues que jamais, cependant celui qui voudrait spéculer sur leur propagation pour en faire l'objet d'un journal, y trouverait fort mal son compte. Les amis des sciences n'auront pas vu sans un sentiment pénible, le savant rédacteur des *Annales de Nismes* convenir lui-même, après tant de services rendus aux mathématiques, qu'il aurait dû renoncer à son utile entreprise sans l'intervention du gouvernement français (1). On peut tout au moins inférer de là que les personnes qui s'occupent de pareilles publications, ont fait abnégation de toute espèce d'intérêt particulier. M. *Crelle*, qui s'était fait un nom honorable par des ouvrages justement estimés, est venu remplir une lacune qui existait dans les journaux allemands, et qu'on ne peut s'expliquer que par les motifs dont nous venons de parler. Le journal qu'il publie à Berlin, depuis 1826, est rédigé à peu près sur le même plan que les *Annales* de M. *Gergonne*; il en paraît annuellement quatre livraisons in-4° de 10 à 12 feuilles d'impression. Les volumes qui ont paru jusqu'à présent, sont de nature à justifier toutes les espérances qu'on était en droit de concevoir

(1) Nous ignorons les motifs qui ont suspendu la publication de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, qui a également rendu de vrais services à la science.

d'une pareille publication. A côté des travaux dont M. *Crelle* enrichit son recueil, on trouve des recherches de plusieurs des hommes les plus distingués de l'Allemagne. Il suffirait pour recommander une semblable entreprise, de citer les noms de MM. *Gauss*, *Eytelwein*, *Clausen*, *Poncelet*, *Burg*, *Jacobi*, *Abel*, *Olivier*, *Steiner*, *Lehmus*, *Dirksen*, *Rabe*, etc., si le nom de M. *Crelle* n'était pas une garantie suffisante pour les amis des sciences. Nous désirons vivement que cet important recueil obtienne tout le succès qu'il mérite, et nous nous estimerions heureux de pouvoir contribuer à sa propagation dans ce royaume.

Bijdragen tot de Natuurkundige wetenschappen. Recueil pour les sciences naturelles, par MM. *H. C. Van Hall*, *W. Vrolik* et *G. J. Mulder*, in-8°; à Amsterdam, chez *H. Gartman.*

Ce journal, rédigé à peu près sur le même plan que les *Annales des sciences naturelles* que publiaient à Bruxelles MM. *Bory de St.-Vincent*, *Drapiez* et *Van Mons*, paraît depuis 1826 sous forme de publication trimestrielle de dix feuilles environ. Il se compose de deux parties distinctes, dont la première est spécialement destinée à recueillir des mémoires sur : 1° la physique; 2° la chimie; 3° la géologie et la minéralogie ; 4° la botanique; 5° la zoologie et l'anatomie comparée; le même titre comprend aussi les notices historiques. La seconde partie est destinée à une revue bibliographique et à des annonces succinctes sur les sciences.

Nous avons vu avec plaisir, par un avis placé en tête de la première livraison de cette année, que les estimables rédacteurs de ce recueil n'ont qu'à se féliciter du succès qu'obtient leur entreprise. On ne s'étonnera pas de ce résultat, si l'on considère le zèle qu'ils mettent à remplir leurs engagemens et le choix des articles qu'ils présentent à leurs lecteurs. Il est peu de pays où l'on s'occupe plus des sciences naturelles; ils devaient donc s'attendre à trouver de nombreux appréciateurs de leurs travaux.

Les deux dernières livraisons se recommandent comme celles

des deux années précédentes par une grande variété d'articles sur les sciences naturelles. Pour ne parler ici que de ceux qui concernent plus particulièrement nos lecteurs, nous citerons les observations de MM. *Moll* et *Hageman* sur l'emploi de la vapeur dans les arts, celles de M. *Mulder* sur la nomenclature chimique; des remarques de M. *Van Beek* sur la préservation des métaux contre l'oxidation, etc. On trouve aussi dans la dernière livraison l'article de M. *Verdam*, sur les machines à vapeur, que nous avons donné de notre côté, à la page 246 de ce recueil; nous aurions désiré pouvoir reproduire ici en entier des recherches curieuses de M. *Moll* sur la vitesse des animaux et des chevaux en particulier; nous nous contenterons de faire connaître les résultats qu'il rapporte.

ANIMAUX.	MÈTRES PAR SECONDE.	LONGUEUR DE LA COURSE.
Cheval de course Hollandais	11,3	384,3 mèt.
— — (1)	12,56	376 à 563.
— Frison	9,2	— —
— Anglais	7,16	16090
— —	14,4	6789 *long course.*
à *Newmarket*	14,6	6075 *round course.*
Childers (2)	15,08	6784 *long course.*
—	15,19	6075 *round course.*
—	27,17	carrière très-bornée.
à *Sterling*	14,28	sans se lasser.
Au *cours*, à Rome	11,96	1686.
Patineurs en Frise	11,70	175.
—	8,69	226.
Cheval de course à Paris	7,53	inconnu.
Renne	7,4	1287200 mort après la course.
Chameau	1,1	voyageant dans le désert.

(1) Ce coursier Hollandais est un des plus rapides dont il soit fait mention; la vitesse du précédent a été observée par M. *Moll*, aux courses d'Utrecht.

(2) Un des chevaux les plus rapides du siècle précédent; on peut consulter sur le même sujet le *Traité des machines* de M. *Hachette*, voyez plus bas à la page 279.

On trouve dans la dernière partie du recueil, un catalogue intéressant des ouvrages nouveaux qui paraissent dans les différentes langues, ainsi qu'un résumé des principales recherches scientifiques faites dans ce pays et à l'étranger.

De Meetkunst op de kunsten en ambachten toegepast. La géométrie appropriée aux arts et métiers, par M. *Lemaire*, professeur extraordinaire à l'Université de Gand, chez Vassas et comp^{e}, 1828, in-8°.

M. *Lemaire* vient de terminer la publication de son Cours de géométrie, dont nous avons annoncé les premières feuilles à la page 74 de ce recueil. Ce cours, approprié aux besoins des industriels, se compose de quatorze leçons, renfermant en substance les propositions les plus usuelles de la géométrie. L'auteur avait affaire dans ses leçons publiques, à un grand nombre d'auditeurs plus familiarisés avec les travaux des ateliers qu'avec le langage et les formes de la science, aussi a-t-il cherché, de bonne foi, à se mettre à leur portée : il a substitué aux démonstrations des vérités géométriques, de nombreux exemples numériques, pour faire comprendre l'usage de ces vérités, et il est parvenu à laisser de cette manière une trace peut-être plus durable des principes qu'il voulait inculquer. Les neuf premières leçons renferment tout ce qui concerne les lignes, les angles, les polygones, le cercle et les figures semblables; la dixième traite des polyèdres; les 11e, 12e et 13e des cylindres, des cônes et de la sphère, la dernière leçon présente des notions générales sur les surfaces développables, les surfaces gauches, les lignes à double courbure, etc. L'auteur annonce dans sa préface qu'il a fait des emprunts à MM. *Dupin* et *Bergery*; mais le parti qu'il a su tirer de ces emprunts fait preuve de son discernement; d'ailleurs, dans la composition de ces sortes d'ouvrages, il est impossible de ne rien prendre à ses devanciers, et l'on doit s'estimer heureux quand, par le choix de ses matériaux et par l'ordre qui a présidé à leur disposition, on est parvenu à faire un ouvrage utile et d'une lecture agréable.

M. *Lemaire* a dédié son travail à M. *Van Ewyck*, administrateur de l'instruction publique; il était sûr, en paraissant sous d'aussi heureux auspices, de réunir de nouvelles chances de succès en sa faveur.

M. *Pagani*, qui remplit à l'Université de Louvain les mêmes fonctions que M. *Lemaire* à Gand, vient de terminer également le *Résumé des Leçons de Mécanique* de *Dupin*. Les connaissances approfondies de M. *Pagani* dans les sciences mathématiques sont une garantie que les extraits de l'ouvrage du géomètre français ont été choisis avec discernement.

Les leçons sur la mécanique et les machines que M. *Dandelin* donne à l'Université de Liége, se publient avec moins d'activité que ne le désireraient les nombreux souscripteurs; il est vrai que des occupations diverses et un voyage fait en Angleterre par ordre du gouvernement des Pays-Bas, ont pu être cause de ces retards. Nous n'avons reçu jusqu'à présent que la 10ᵉ leçon, qui renferme les principes de la théorie du levier; l'auteur ne craint pas d'entrer dans des détails mathématiques qui conduisent souvent à des considérations très-piquantes. Quoique son ouvrage soit écrit pour des commençans, il sera lu avec plaisir, même par les géomètres, qui y trouveront, comme dans ses autres travaux, un caractère d'originalité qui ne peut être bien apprécié que par eux.

Beginselen der Meetkunde, Traduction de la Géométrie de Legendre, par M. *C. Diricq*, professeur à l'Athénée de Bruxelles; chez *Remy*, 1828.

« Depuis long-temps, dit le traducteur, on sentait le besoin d'une traduction hollandaise de la Géométrie de *Legendre*, et ce besoin est encore augmenté depuis que dans plusieurs écoles publiques, où l'on suivait cet auteur, l'enseignement des mathématiques se fait en hollandais. » Nous pensons effectivement que M. *Diricq* a rendu un service à l'enseignement, et nous devons désirer qu'il continue son travail, dont il n'a paru encore que les deux premiers livres. La traduction est littérale et elle

est faite sur la 12ᵉ édition de *Paris*. M. *Diricq* promet de donner en notes, des explications que l'expérience a démontrées être plus simples que celles qui se trouvent dans le texte français. Comme ce sera-là véritablement la partie de son travail susceptible d'une analise, nous devons pour le moment nous borner à annoncer les deux premières livres, qui sont en vente.

Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral; par *S. F. Lacroix*, 1828.

Le mérite des ouvrages de M. *Lacroix* est suffisamment reconnu pour que nous puissions nous dispenser d'en faire encore ici l'éloge; ils ont été généralement adoptés pour l'instruction et traduits dans la plupart des langues modernes; c'est leur meilleure recommandation. Malgré ces succès, l'auteur s'occupe encore continuellement de l'amélioration de ses ouvrages; la 4ᵉ édition de son *Traité élémentaire de Calcul différentiel* en offrira une nouvelle preuve.

Elementa Geometriæ, etc.; par *E. J. Goebel*, professeur à l'Université de Louvain. 2ᵉ édition, à Louvain, chez *Cuelens*, 1828, in-8°.

M. *Goebel* a fait subir de nombreuses modifications à la première édition de sa géométrie; dans les *élémens* qu'il publie aujourd'hui se trouvent plusieurs additions telles que des tables de logarithmes, pour les nombres depuis 1 jusqu'à 10,000, et pour les sinus et tangentes des angles de minute en minute; il y a fait entrer aussi des notions élémentaires sur les sections coniques, ce qui peut être très-avantageux pour des élèves qui, n'étant pas destinés à pousser un peu loin l'étude des mathématiques, ont besoin cependant de connaître les principales propriétés de ces courbes, pour aborder l'étude de la physique. Toutefois, nous ne saurions approuver la méthode mixte que l'auteur suit dans ses démonstrations; elle doit paraître surannée aux personnes habituées à l'élégance des calculs modernes.

Traité de la Chaleur et de ses applications aux arts et aux manufactures; par *E. Péclet*, 2 vol. in-8° avec atlas. Paris, chez *Malher* et compᵉ, 1828.

Depuis l'immense développement qu'ont pris les connaissances industrielles, la théorie de la chaleur est devenue une des branches les plus importantes de la physique. Elle exige pour être exposée avec quelque détail des traités particuliers, parce qu'elle doit comprendre en effet des recherches qui, par leur spécialité, ne sauraient faire partie de la physique générale. Ces considérations ont fait naître l'ouvrage que nous annonçons; l'auteur, qui est déjà très-avantageusement connu par un traité de l'*éclairage* et par un grand nombre d'autres travaux sur la physique et la chimie, a présenté toutes les recherches qui ont été faites sur la chaleur et tout ce qu'il devait lui-même à une longue expérience. Son traité est divisé en deux parties; l'une renferme les principes généraux, l'autre les applications. Les principes généraux comprennent: 1° la théorie physique de la chaleur, 2° la théorie de la combustion et des combustibles; 3° la théorie des mouvemens de l'air chaud; 4° la théorie des cheminées. Les applications comprennent: 1° la vaporisation; 2° la distillation; 3° l'évaporation; 4° le séchage; 5° le chauffage des gaz; 6° le chauffage des liquides; 7° le chauffage des corps solides; 8° le refroidissement. On remarquera particulièrement tout ce que dit l'auteur *du mouvement de l'air chaud et des cheminées*; c'est le résultat de ses recherches, qui ont été présentées à l'Institut de France, dont elles ont reçu l'approbation et dont des extraits ont été publiés par le *Globe*. De pareils ouvrages sont d'une utilité trop immédiate pour ne pas être accueillis très-favorablement par les personnes qui s'occupent de physique industrielle.

Traité élémentaire des Machines; par M. *Hachette*. 4ᵉ édit. avec 35 planches. Paris, chez *Corby*, 1828, 1 vol. in-4°.

M. *Hachette* est un des savans qui ont le mieux mérité la reconnaissance publique par la variété et l'utilité de ses travaux

dans les sciences. Élève et ami de *Monge*, il s'est associé aux travaux de cet illustre géomètre, par la publication de son *Traité de Géométrie descriptive*, par son *Supplément à la Géométrie descriptive de Monge*, par ses *Élémens de Géométrie à trois dimensions*, etc. On lui doit aussi la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, recueil éminemment utile, dont la publication a été malheureusement trop tôt suspendue ; et ses leçons à l'École polytechnique ont fait naître encore, sous forme de *programmes*, deux ouvrages également recommandables, l'un sur la physique ; et l'autre sur les machines. La nouvelle édition du *Traité élémentaire des Machines*, beaucoup plus complète que les précédentes, ne peut manquer d'être recherchée de toutes les personnes qui veulent acquérir des connaissances approfondies dans la mécanique industrielle. L'auteur a partagé son travail en trois chapitres : le premier traite des moteurs: « On sait que les seuls moteurs applicables aux machines sont les animaux, l'eau, le vent et les combustibles ; la nature de ces moteurs détermine la forme des machines, qui reçoivent et transmettent l'action dont ils sont capables. Ainsi, les combustibles ne deviennent moteurs que de trois manières : 1° en passant, comme la poudre à canon, de l'état solide à l'état gazeux; 2° en convertissant l'eau en vapeur; 3° en élevant la température d'un gaz permanent : et il n'y a que trois espèces de machines à feu, savoir: les bouches à feu, telles que des canons, mortiers, etc. ; les machines à vapeur et les roues mues par un courant d'air chaud dans un milieu plus dense. » Ce chapitre renferme des recherches très-curieuses sur la force et la vitesse des hommes et des chevaux, et sur la mesure du plus grand effort qu'ils peuvent produire. La vitesse de l'homme qui se promène ou qui marche en plaine, sans charge, est de 13 à 16 décimètres par seconde ; lorsqu'il tire ou lorsqu'il agit par son poids sur une roue, sa vitesse est seulement de 3 à 4 décimètres. Suivant une observation de M. *Bouvard*, aux courses du Champ de Mars, à Paris, 251,5 mètres ont été parcourus en 33″, ce qui donne pour la plus grande vîtesse de l'homme qui court sans charge 7,7 mètres par seconde. Suivant le même sa-

vant, un cheval portant son cavalier et courant sur un chemin plat sinueux, de la forme d'un 8, parcourait 2575,5 mètres en 3′ 31″. Un cheval, attelé à un char, a parcouru le Champ de Mars, sur un chemin de même forme et de 1478 mètres, en 2′ 13″. Ces expériences donnent pour la plus grande vitesse du cheval, en 1″ :

La première — 12, 21 mètres.
La seconde — 11, 11 —

On pourra comparer ces résultats à ceux dont nous avons parlé plus haut, *page* 275.

M. *Hachette* a été souvent dans le cas de citer le résultat de ses nombreuses expériences, et particulièrement sur l'écoulement des liquides et des gaz par des ajutages. Le second et le troisième chapitres sont consacrés à l'examen des machines élémentaires, et principalement des engrénages ainsi que des machines employées dans les constructions. Un appendice renferme des descriptions de plusieurs dynamomètres et les moyens de mesurer les pressions exercées sur des corps en mouvement. On remarquera sans doute les nouvelles trompilles des soufflets *trompes* que propose l'auteur, ainsi que la nouvelle romaine dynamométrique dont nous regrettons de ne pouvoir donner la description.

Annuaire de la province de Limbourg, année 1828. A Maestricht, chez *Nypels*, in-12.

Nous avons déjà eu occasion d'annoncer cet *Annuaire*, rédigé par la société des amis des sciences, lettres et arts, établie à Maestricht. De petits ouvrages semblables, faits avec discernement par des hommes instruits et pour les différentes provinces du royaume, formeraient des collections d'un haut intérêt, puisqu'on y trouverait les documens statistiques des provinces, les valeurs relatives des poids et mesures, des notices historiques sur les anciens monumens, des observations météorologiques, etc. Tout ce qui concerne la météorologie est traité dans

l'Annuaire du Limbourg, avec un soin qui fait honneur au savant qui s'est chargé de la rédaction de cette partie. Parmi les phénomènes dont il est fait mention, on parle d'une aurore boréale, observée dans la nuit du 25 au 26 septembre dernier. Ce spectacle, très-rare dans nos provinces, n'a été vu que par un petit nombre de personnes; il s'est reproduit le 26 à 10 heures du soir, mais avec un très-faible éclat.

— Les journaux ont parlé d'une manière avantageuse d'une machine à vapeur de M. *Fafchamps* pour l'épuisement de l'eau des mines, minières, carrières, marais, etc. Cette machine est en activité et peut être vue à Charleroi; elle est à double effet et peut agir à haute, moyenne ou basse pression. M. *Fafchamps* nous écrit qu'il a été constaté par des ingénieurs qu'elle lève par minute 275 litres à 7m. 65 de hauteur, en dépensant 2 kil. 80 de charbon par heure, dépense qu'il estime devoir diminuer d'un tiers, lorsque la machine sera établie plus en grand.

Onderzoek over het gebruik van een openbaar spel, speciaal toegepast op het Rijk der Nederlanden; door M. A-D. Meyer. Amsterdam, *H. Gartman*, 1828, in-8°.

L'auteur, qui est avocat à Amsterdam, et qui, si nous ne nous trompons, est frère du célèbre jurisconsulte du même nom, avait reconnu par expérience les abus auxquels donnait lieu la loterie hollandaise. En 1815, il avait à ce sujet présenté au gouvernement le mémoire qu'il publie aujourd'hui, et dans lequel il cherchait à donner aux loteries une direction moins désastreuse. Il se plaint de ce que, dans l'organisation nouvelle des loteries, on s'est servi de son travail, mais en manquant entièrement le but utile qu'il indiquait. Voici à-peu-près les bases de son plan : On établirait deux loteries par mois, qui présenteraient de grands prix de fl. 100,000, de 70,000, de 40,000, payables sans déduction. Les billets ne seraient que de 10 fl., et on ne ne pourrait les partager en moins de dix parties; les billets non débités resteraient à charge du trésor. On aurait

aussi un tableau de prix et de primes d'environ fl. 500,000; et, en cas de besoin, on formerait des tableaux supplémentaires. L'auteur calcule que le bénéfice du trésor devrait former les 3/8 des sommes exposées.

Rapport sur les institutions de bienfaisance du Royaume. A La Haye, imprimerie de l'État, 1828, in-8°.

Ce rapport, fait aux États-Généraux par le ministère de l'intérieur, est plus étendu que ceux qui ont été faits jusqu'à présent sur le même sujet. Les documens qu'il renferme concernent l'année 1826, et forment la matière de trois chapitres : le premier a pour objet les institutions qui accordent des secours; le second, celles qui ont pour but de diminuer le nombre des pauvres; le troisième, celles qui tendent à prévenir l'indigence.

Les institutions pour les secours comprennent les administrations pour les secours à domicile, les commissions qui distribuent des alimens et du chauffage, celles qui donnent des secours aux pauvres honteux, les hospices, etc. 812,761 personnes ont participé aux bienfaits de ces institutions, et ce nombre est à la population du Royaume comme 135 est à 1000. Les dépenses de ces institutions se sont élevées à fl. 9,770,046; les ressources, par lesquelles on a pourvu aux dépenses, ont produit fl. 9,900,465.

Les institutions qui ont pour but de diminuer le nombre des pauvres comprennent les écoles pour les pauvres, les ateliers de charité, les dépôts de mendicité, les colonies de bienfaisance, etc. 333 institutions de cette espèce ont donné de l'éducation ou du travail à 164,855 individus. La dépense s'est élevée à fl. 1,255,267, et les ressources ont produit fl. 1,233,495.

Les institutions qui tendent à prévenir l'indigence comprennent les monts-de-piété, les caisses d'épargnes, etc. Ces institutions étaient au nombre de 174, et leurs capitaux s'élevaient à fl. 6,979,677.

Nous regrettons de ne pouvoir offrir ici une analise du *rapport* que nous annonçons; il faudrait à cet effet reproduire les

nombreux tableaux qui composent ce travail, et qui donne tous les renseignemens qu'on peut désirer sur les institutio de bienfaisance.

Cet ouvrage est un des plus utiles que puissent consulter l personnes qui s'occupent de la statistique de notre Royaum

---

QUESTIONS.

I. On connaît dans un triangle : 1° le rapport de deux de angles ; 2° le rapport de deux de ses côtés :

Soit (A) de ceux qui forment l'un de ces deux angles ;

Soit (B) de ceux qui leur sont opposés ;

Soit (C) du côté opposé à l'un d'eux et du côté opposé au t sième angle.

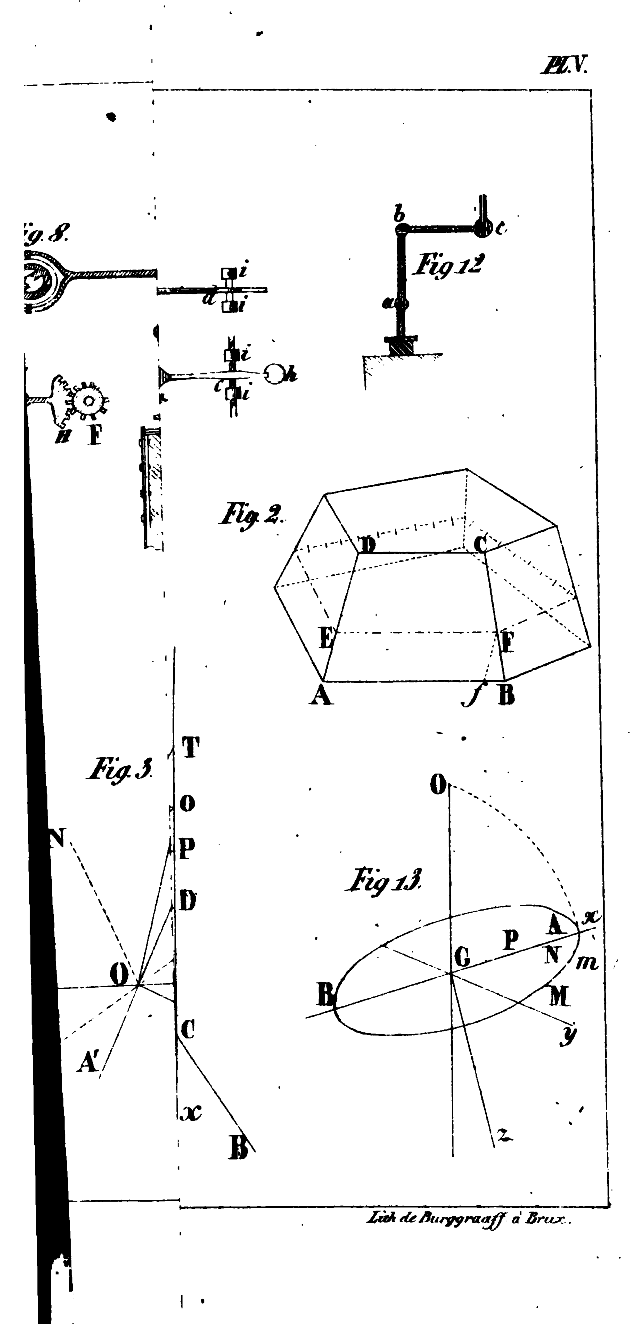
On peut, dans des cas particuliers, déterminer facilem les trois angles ; par quel procédé le problème pourrait-il ê résolu d'une manière générale?

II. Si de trois plans rectangulaires, l'un est toujours tang à une sphère de rayon R ; l'autre à une sphère de rayon R' troisième à une sphère de rayon R'' (ces trois sphères ét concentriques), quelle sera la surface engendrée par leur p d'intersection ?

On pourra varier le problème en supposant trois axes rec gulaires au lieu de trois plans.

III. Si l'on divise la circonférence en 27 parties égales, aura sa longueur approchée en prenant sept fois la corde joint les points 1 et 5, ou qui soustend un arc égal à $\frac{8\pi}{27}$. La va obtenue par ce procédé ne surpasse la véritable que de 0,00000 en supposant le rayon égal à l'unité ; peut-on déduire de là construction graphique expéditive pour rectifier la circo rence?

Pl. V.



Lith de Burggraaff à Brux.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Extrait d'une lettre de M. HACHETTE, *sur un problème des lieux géométriques* (1).

Avez-vous eu occasion de *rechercher la surface dont chaque point est équidistant d'un plan et d'une ligne droite?* J'ai pensé à cette surface, pour déterminer le centre d'une sphère circonscrite à l'hyperboloïde de révolution réglé et tangente à un plan qui coupe cet hyperboloïde. Il est bien facile de démontrer que c'est un cône oblique à base elliptique qui jouit de la propriété que les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque sur un plan et une droite donnée sont égales entre elles. D'abord la surface se compose de lignes droites qui passent par le point d'intersection du plan et de la droite donnée, et dont chacune peut être considérée comme l'axe d'un cône droit qui est déterminé; car le cône droit a pour arête la droite donnée, pour plan tangent le plan donné, et pour arête de contact une droite tracée arbitrairement dans ce dernier plan, par le point où il est rencontré par la droite donnée. Regardant la droite donnée comme l'axe d'un cylindre droit d'un rayon quelconque, l'intersection de ce cylindre par un plan parallèle au plan donné et

---

(1) Nous apprenons que M. *Hachette* s'occupe d'une nouvelle édition de son *Traité de Géométrie descriptive*, dans laquelle on trouvera beaucoup de recherches nouvelles. A. Q.

distant de ce plan d'une droite égale au rayon du cylindre est une ellipse qui appartient à la surface cherchée; d'où il suit que cette surface est un cône oblique à base circulaire. Le point d'intersection d'un cône pareil et de l'axe de révolution de l'hyperboloïde détermine le centre d'une sphère circonscrite à l'hyperboloïde et tangente au plan donné.

Cette solution est très-simple, lorsque le plan donné coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole ou une parabole, parce que dans ces deux cas, il y a des droites de l'hyperboloïde parallèles au plan coupant; c'est alors un *cylindre parabolique,* dont la génératrice est parallèle à chacune de ces droites, et dont la section droite se détermine, en menant un plan quelconque perpendiculaire à la droite et au plan donnés, l'une en un point, et l'autre suivant une ligne qui sont respectivement le foyer et la directrice d'une parabole, section droite du cylindre. Je suppose dans tout ce qui précède, que la surface réglée de l'hyperboloïde de révolution est donnée par l'axe de révolution et par la droite génératrice qui tourne autour de cet axe.

ANALISE.

Pari, SANS RISQUE AUCUN, *de gagner à la loterie génoise* (1).

On peut rencontrer un homme inattentif, qui, bien persuadé du désavantage des pontes, que les lois relatives à la loterie appellent si plaisamment ses *actionnaires*, croira avoir la probabilité et un grand avantage de son côté, en pariant,

(1) Nous devons cette note à l'obligeance d'un de nos députés, qui consacre aux sciences le peu d'instans de loisir que lui laissent de nombreuses et importantes occupations. A. Q.

à enjeux égaux, qu'un joueur n'y gagnera pas à un tirage déterminé.

Il est évident cependant, qu'à enjeux égaux, on peut *parier* de gagner à chaque tirage, non-seulement avec égalité, mais avec prépondérance d'avantage.

Si l'on joue 45 numéros par extraits déterminés, tous au même ordre de sortie, on jouera avec égalité d'avantage, tant *à tous égards*, contre le parieur, qu'*à l'égard de la probabilité de sortie*, contre la loterie elle-même.

On parie, avec une supériorité d'avantage et une probabilité de 46 contre 44, de 47 contre 43, etc., si l'on affecte à la même sortie 46, 47, etc., numéros.

On porte cet avantage aussi haut que possible, en plaçant sur le même ordre de sortie 69 des 90 numéros. Si l'un des 69 sort, ce qui a une probabilité de $\frac{69}{90}$, l'on gagne une mise; car la loterie vous en paie 70. La loterie autrichienne de Bruxelles, plus *libérale*, c'est-à-dire, moins arabe que la française et que la nôtre, en payait 75. L'une paie 20, l'autre se contentait de ne payer que 15 mises de moins qu'il n'était dû.

Si je trouve un parieur, je fais le pari le plus haut qu'on voudra bien accepter; car, en ce qui concerne le pari, non-seulement mon avantage est notable et manifeste, mais il y a telle manière de s'y prendre, que le joueur à la loterie demeure indemnisé, ou même fasse encore un bénéfice en perdant son pari.

L'adversaire, disposé à accepter le pari, pourrait tergiverser peut-être, par la crainte qu'il n'y ait quelque chose de captieux ou d'équivoque dans la proposition.

Pour lui faire voir qu'aucun subterfuge de chicane n'est possible, on peut énoncer le pari en ces termes :

« Je prendrai des billets de loterie pour le tirage que vous
» indiquerez : je les déposerai cachetés entre les mains de qui
» vous le voudrez. Ils portent avec eux la preuve du montant
» de mes mises. Le tirage fait, on ouvrira le paquet, et je
» parie la somme qu'il vous plaira, que la loterie aura plus
» d'argent à me payer qu'ils ne m'auront coûté. »

Le pari fait, je prends 69 numéros différens, par extraits déterminés au même ordre de sortie, j'ai 69 chances pour moi, tant contre la loterie que contre mon parieur adverse qui n'en ont que 21. Mais, comme malgré la notable prépondérance de cet avantage, qui est de 23 contre 7, ou de $3 \frac{2}{7}$ contre contre 1, je n'en joue pas moins avec grand désavantage contre la loterie, à cause de la somme proportionnellement beaucoup trop petite que mon gain probable peut éventuellement me procurer, et qu'à la longue au moins je me ruinerais, en m'opiniâtrant à ce jeu contre elle, je ne mets sur chacun de mes 69 extraits, que le moindre enjeu que la loterie accepte, fl. 0,05, par exemple : ma mise totale est de 69 fois 0,05, ou de fl. 3,45.

Si je gagne, comme il est probable, je ne gagnerai que 0,05, ou une seule mise. La loterie m'en paie 70; mais, comme l'un de ses priviléges est encore de prendre et de ne pas faire crédit, j'ai commencé par lui en payer 69.

Puisque j'engage contre elle, avec une probabilité de 69 contre 21, un total de 69 mises qu'elle retient, si je perds; je devrais recevoir d'elle, en cas de gain, non pas une simple mise seulement de profit, mais vingt-une, c'est-à-dire, ce qui d'ailleurs est évident, qu'elle devrait payer l'extrait déterminé gagnant, à raison de 90 fois la mise, dont 89 mises pour son enjeu proportionnel, et 1 mise pour la restitution de la mienne, dont elle a commencé par se nantir.

Tout mon avantage est contre le parieur, mais quoiqu'il soit très-grand, il est possible cependant que je perde un ou même quelques paris pris isolément.

Je puis me précautionner contre cet événement même, et c'est pourquoi j'accepte les paris aussi forts qu'on le veut, sans crainte d'être mis dans l'impossibilité de payer. C'est la loterie alors qui me donne le moyen de me tirer d'affaire, avec indemnité complète, si je le veux, ou même, si je le préfère, *avec un bénéfice certain*, soit que je gagne, soit que je perde le pari,

En voici la manière. (On pourrait négliger la considération

du coût, au *minimum*, des 69 mises, car dans la spéculation que fait le joueur pariant, il s'en inquiète peu. Pour plus d'exactitude, on calculera tout) :

Soit la somme du pari $= p$.

Si je le gagne, je gagne 1° à la loterie . . fl.		0. 05
2° du pari		p . . . . .
En tout		$p +$ 0. 05

Si je perds, je perds 1° mes 69 mises . . fl.		3. 45
2° le pari		p . . . . .
En tout. . . .		$p +$ 3. 45

Afin d'être au moins indemnisé, ou même, si je le veux, pour m'assurer un bénéfice dans tous les cas possibles, je recherche ce que, pour y parvenir, il me faudrait mettre, par extrait déterminé à la même sortie du même tirage, sur chacun des 21 numéros qui forment les 21 chances de la loterie.

Pour cela, il faut qu'en cas de perte sur mes 69 mises, le gain que me procurera infailliblement alors l'une des 21 autres mises que je fais à part moi, soit supérieur ou équivalent au moins à la somme de ladite perte ($= p +$ 3. 45), et de plus, à la dépense des 21 mises nouvelles.

Soit cette mise $= x$.

Il faudra que ce que la loterie aura à payer pour la sortie de l'une des 21 mises auxiliaires, ou que $70x$ soit $=$ ou $>$ $\overline{21x + p + 3.45}$, c'est-à-dire, $x =$ ou $> \frac{p + 3.45}{49}$.

$\frac{p + 3.45}{49}$ est la plus petite valeur de x. Il peut faire davantage, mais pas indéfiniment; car il faut qu'en cas de gain sur les 69 billets mis en dépôt pour la vérification du résultat du pari, il ne soit pas plus qu'absorbé par la somme des 21 mises.

Donc le pari p, + le gain fait à la loterie qui me le fait gagner ou $p + 0.05$ doit être $=$ ou $> 21x$.

Donc, de ce chef, $x =$ ou $< \frac{p + 0.05}{21}$.

x ne peut donc aller ni au-dessous de $\frac{p + 3.45}{49}$, ni au-dessus de $\frac{p + 0.05}{21}$.

Soit maintenant le pari $p = 100$ guillaumes, ou fl. 1000.

x doit faire au moins 20. 47, au plus 47. 61.

En me tenant dans les limites, je puis m'arranger de manière à embourser toujours quelque chose, soit que je gagne le pari, soit que je le perde, ou, du moins, à n'avoir rien à suppléer, pour m'acquitter éventuellement envers le parieur.

Si, pour profiter sans risque de tout mon avantage contre le parieur, je consentais à être indemne, et rien de plus, dans le cas où je viendrais à perdre le pari, j'aurai, pour déterminer la valeur de x, que ce que j'ai à payer, dans ce cas, doit équivaloir à ce que je retirerai.

Ma mise sur les 21 numéros favorables au parieur $= 21x$; le produit de celui de ces numéros qui gagne nécessairement dans le cas du pari perdu $= 70x$; le bénéfice de cette partie de l'opération $= 49x$; il doit couvrir le pari $p +$ les 69 mises sur lesquelles il porte.

Donc $49x - 1003.45 = 0$, ou $x = 20.47$.

En perdant le pari, je ne perds ni ne gagne. Ce qui me rentre équivaut à ce que je débourse.

Il me reste fl. 569. 97 de bénéfice, si je gagne le pari.

Si je voulais faire ensorte d'embourser autant, soit que je gagne le pari, soit que je le perde; puisque j'aurai :

En gagnant le pari	$1000.05 - 21x$
En le perdant.	$49x - 1003.45$

ces deux quantités étant supposées égales, x doit faire, dans ce cas, 28. 62, et soit que je gagne, soit que je perde le pari, il me restera fl. 399 de profit.

Le moindre pari (celui que le joueur à la loterie devrait faire

pour jouer et parier sans perte ni gain, quoiqu'il pût arriver), serait celui où les deux valeurs extrêmes de x, seraient égales entre elles.

L'on aurait :

$$\frac{p+3.45}{49}=\frac{p+0.05}{21} \quad \text{ou} \quad 21p+72.45=49p+2.45.$$

Donc p ou le pari

$$=2.5 \quad \text{et} \quad x=\frac{2.5+0.05}{21}=0.121.$$

Si je recherchais quel pari je dois faire pour me retirer du jeu, quoiqu'il arrive, avec un bénéfice déterminé, de fl. 1000 par exemple, la double équation

$$p+0.05-21x=49x-p-3.45=1000,$$

me donnerait pour p ou le pari fl. 2502. 10, et pour x ou chacune des 21 mises auxiliaires fl. 71. 55.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Note relative à un cas particulier de l'équation littérale du quatrième degré; par M. Pagani, professeur extraordinaire à l'université de Louvain.

La dicussion de l'équation générale des sections annulaires (1) m'a conduit à rechercher le symptôme général pour reconnaître si l'équation

$$\text{(M)}\quad R'(a\sin.\theta+x\cos.\theta)\cos.\theta-x\sqrt{R^2-(a\sin.\theta+x\cos.\theta)^2}=0$$

(1) Voyez le tom. V des *Mémoires couronnés* par l'Académie de Bruxelles; et la page 237 du 2e vol. de la *Correspondance*.

a toutes les racines réelles, ou bien deux racines imaginaires.

Dans le Mémoire, où j'ai discuté l'équation générale de ces courbes, je n'ai résolu cette question que pour le cas particulier où $a = o$, ce qui simplifie considérablement l'équation (M). Il est bien vrai qu'en appliquant à l'équation (M) les formules générales pour la résolution des équations du quatrième degré, j'aurais pu parvenir à déterminer le symptôme de la réalité de toutes les racines; cependant le manque de temps et le doute de trouver un résultat assez simple, m'ont empêché d'entreprendre cette recherche lorsque j'ai rédigé le Mémoire qui fut envoyé au concours. Mais, ayant vu depuis cette époque, comment M. *Legendre*, dans son *Traité des fonctions elliptiques* (tom. Ier pag. 349), avait pu déterminer d'une manière très-simple, la condition générale pour la réalité des quatre racines de l'équation

$$(m) \qquad t^4 + At^3 + Bt - 1 = o;$$

j'ai fait la remarque que l'équation (M) pouvait se ramener facilement à la forme de l'équation (*m*) en posant

$$a \sin.\theta + x \cos.\theta = R\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right).$$

En effet, si nous faisons cette substitution dans l'équation (M), nous trouverons sans peine

$$t^4 - \frac{2(R + a\sin.\theta)}{R'\cos.^2\theta}t^3 + \frac{2(R - a\sin.\theta)}{R'\cos.^2\theta}t - 1 = o.$$

En comparant cette transformée avec l'équation (*m*), on a

$$A = -\frac{2(R + a\sin.\theta)}{R'\cos.^2\theta};\ B = \frac{2(R - a\sin.\theta)}{R'\cos.^2\theta}.$$

Or, M. *Legendre* prouve que l'équation (*m*) aura deux racines

réelles et deux imaginaires, si l'on a

$$\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1;$$

et qu'elle aura quatre racines réelles dans le cas contraire. Il est donc aisé de conclure que l'équation (M) aura deux racines imaginaires lorsqu'on aura

$$R^{\frac{2}{3}} < (a \sin. \theta)^{\frac{2}{3}} + (R' \cos.^2 \theta)^{\frac{2}{3}}.$$

C'est le symptôme général que nous nous étions proposé de trouver. Il est aisé de s'assurer que ce symptôme coïncide avec celui que nous avons donné pour le cas particulier de $a = o$.

Nous pouvons encore, d'après M. *Legendre*, ramener la résolution de l'équation (M) à celle de l'équation $\sin.(\omega - \lambda) = K \sin. 2\omega$, qu'il est facile de résoudre trigonométriquement, en faisant

$$x = \frac{R \cos. \omega - a \sin. \theta}{\cos. \theta}, \text{ tang. } \lambda = \frac{R' \cos.^2 \theta}{a \sin. \theta}, K = \frac{R \cos. \lambda}{2a \sin. \theta}.$$

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

Extrait d'une lettre de M. Chasles, sur les surfaces du second degré (1).

Premier théorème. Quand plusieurs surfaces du deuxième degré sont inscrites dans une même surface du deuxième degré A ; tous les cônes circonscrits à ces surfaces et qui ont pour sommet commun un point de la surface A, ont deux arêtes communes (réelles ou imaginaires), comprises dans le plan tangent à la surface A, au sommet commun des cônes (ou, en d'autres termes, tous les cônes ont ce plan tangent pour *plan de symptose* commun).

Les droites diamétrales conjuguées à ce plan, par rapport aux cônes, sont les droites qui vont, de leur sommet commun, respectivement aux pôles des plans de contact des différentes

(1) M. *Chasles*, qui a enrichi les *Annales mathématiques* de plusieurs beaux Mémoires, nous prévient qu'il est parvenu de son côté à quelques théorèmes que M. *Bobillier* a donnés dans un cahier précédent de la *Corresp.*, page 153, et qu'il les avait communiqués à M. *Gergonne* dans une lettre en date *de Nice du* 15 *janvier*. Il fait les mêmes observations à l'égard de quelques théorèmes énoncés par M. *Dandelin* et par moi ; je me trouverai personnellement toujours flatté de me rencontrer avec des hommes de son mérite. A. Q.

surfaces avec la surface A (ces pôles étant tous pris par rapport à la surface A, ou respectivement par rapport aux surfaces inscrites).

IIe théorème. Quand plusieurs surfaces du deuxième degré sont circonscrites à une même surface du deuxième degré A, le plan tangent en un point quelconque de cette dernière A, coupe ces surfaces suivant des coniques qui ont toutes, prises deux à deux, le point de contact pour point de concours de deux tangentes communes (réelles ou imaginaires) (ou, en d'autres termes, pour centre d'homologie).

Les polaires de ce point, par rapport à ces coniques, sont les droites suivant lesquelles le plan tangent coupe les plans de contact des surfaces circonscrites avec la surface A.

Ces deux propositions sont d'une évidence bien remarquable dans le cas où la surface A est un hyperboloïde à une nappe, parce que son plan tangent contient deux génératrices tangentes à toutes les surfaces circonscrites à cette surface. La démonstration pour le cas d'une autre surface, est extrêmement facile.

Ces deux théorèmes offrent parmi un grand nombre de conséquences, les propriétés des projections stéréographiques, et votre élégant théorème sur les foyers de la section plane d'une surface du deuxième degré de révolution (1). Permettez-moi d'ajouter encore, comme conséquence, ce théorème que je crois nouveau : *Quand plusieurs cônes circonscrits à une surface du deuxième degré, ont leurs sommets en ligne droite, tout plan tangent à cette surface les coupe suivant des coniques qui ont quatre tangentes communes réelles ou imaginaires* (ou, en d'autres termes, deux centres d'homologie communs).

Chartres, le 14 juillet 1828.

---

(1) Nous avons déjà fait observer ailleurs, que ce théorème est de M. *Dandelin*. A. Q.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Sur la génération des courbes par une droite mobile, par M. Le François, instituteur à Bruges.

« Une droite donnée par son équation, étant assujettie à se mouvoir suivant une loi donnée, trouver la courbe à laquelle cette droite restera tangente. »

Comme je me suis proposé de traiter cette question indépendamment d'aucune considération infinitésimale, j'emploierai le calcul des fonctions.

Soit $$f(x, y, a, b,) = o. \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

l'équation de la droite donnée, x, y étant ses coordonnées courantes, et a, b des quantités d'où dépend la position de la droite, constantes pour une même position, mais variant d'une position à l'autre, suivant la relation

$$\varphi(a, b) = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

J'observerai d'abord qu'au point de contact que la droite donnée aura avec la courbe dans chacune de ses positions, les coordonnées seront communes à l'une et à l'autre.

De plus, la droite donnée se confond en ce point avec la tangente à la courbe, leur inclinaison y est donc la même. Or, cette inclinaison est déterminée par la valeur de y' seule, valeur qu'on tirera de

$$f'(x, y) = o,$$

ou de la fonction prime de l'équation (1), par rapport à x, y

seules. Mais la fonction prime totale de la même équation (1) serait évidemment

$$f'(x,y)+f'(a,b)=o;$$

et, puisque la première partie est nulle, il en est de même de la seconde; donc

$$f'(a,b)=o,$$

ou encore

$$b'f'(b)+f'(a)=o,$$

en regardant b comme fonction de a.

D'ailleurs, l'équation (2) donne par sa dérivation

$$\varphi'(a,b)=b'\varphi'(b)+\varphi'(a)=o.$$

Multipliant cette dernière équation par $f'(b)$, et la précédente par $\varphi'(b)$, et retranchant les résultats, on obtient une nouvelle relation $f'(a)\varphi'(b)-f'(b)\varphi'(a)=o$, que nous représenterons par

$$\pi(a,b)=o. \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

enfin, l'élimination de a et b entre (1), (2), (3), donnera une dernière équation

$$F(x,y)=o,$$

qui sera celle du lieu cherché.

A cette question générale se rattachent un grand nombre de cas particuliers, qu'il sera toujours facile de traiter comme nous allons le faire voir par quelques exemples.

On sait que $b-y=y'(a-x)$ est l'équation générale d'une droite tangente au point (x,y) d'une courbe quelconque, lorsqu'on y considère a et b comme variables, et x,y comme constantes.

On sait aussi que dans les lignes du second ordre, la même

équation appartient à la corde de tangence de l'angle circonscrit à la courbe, lorsqu'au contraire a et b étant constantes, x et y sont regardées comme variables. a et b sont alors les coordonnées du sommet de l'angle circonscrit, x et y les coordonnées courantes de la corde. C'est comme jouissant de cette dernière propriété que nous considérerons désormais l'équation

$$b-y=y'(a-x),$$

et nous nous proposerons de rechercher quelle est, dans les courbes du second ordre, la courbe à laquelle la corde reste tangente, lorsque le sommet P de l'angle circonscrit trace sur le même plan, soit une ligne droite, soit une autre courbe du second ordre.

Soit

$$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex=1. \quad . \quad . \quad (A)$$

l'équation des courbes du second degré, on en tire

$$y'=-\frac{By+Cx+E}{Ay+Bx+D},$$

et l'équation de la corde de tangence devient, en ayant égard à l'équation (A),

$$(Ay+Bx+D)\,b+(By+Cx+E)\,a+Dy+Ex-1=0,$$

ou plus simplement

$$pb+qa+r=0,$$

en faisant

$$Ay+Bx+D=p,\ By+Cx+E=q,\ Dy+Ex-1=r. \quad (B)$$

Supposons d'abord que le sommet P parcoure une droite

donnée par l'équation $b = ma + n$, on aura, dans ce cas

$$f(x, y, a, b) = pb + qa + r = o \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$\varphi(a, b) = o \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$f'(a, b) = pb' + q = o, \quad \varphi'(a, b) = b' - m = o,$$
$$\pi(a, b) = pm + q = o \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

La valeur de b, tirée de la seconde, étant substituée dans la première, celle-ci devient

$$(pm + q)a + pn + r = o,$$

et se réduit à

$$pn + r = o. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

à cause de l'équation (3).

On a donc les équations (3) et (4) pour déterminer le lieu cherché : or, elles sont toutes deux linéaires, donc ce lieu est un point ; par conséquent « *Si le sommet de l'angle circonscrit à une courbe du second ordre, glisse le long d'une droite, menée dans une direction quelconque dans le plan de cette courbe, la corde de tangence passera toujours par un même plan.* »

Nous désignerons par O ce point qui, comme on sait, est le pôle de la corde (2).

Si l'équation (A) représente une courbe rapportée à son centre et à ses axes,

$$B = o, \ D = o, \ E = o, \ p = Ay, \ q = Cx, \ r = -1,$$

et les relations (3) et (4) se réduisent à

$$(3')\ldots mAy + Cx = o, \quad nAy - 1 = o, \quad \ldots (4'),$$

d'où

$$y = \frac{1}{nA}, \quad x = -\frac{m}{Cn}.$$

Tant que les quantités m et n seront constantes, la directrice ou la ligne polaire sera unique; mais si l'une d'elles vient à varier, la directrice prendra des positions différentes.

Supposons d'abord m constante et n variable, l'équation (2) appartient alors à une suite de directrices parallèles, ayant chacune un pôle différent, cependant, l'équation (3′) étant indépendante de n, indique que « *Si la ligne polaire se meut parallèlement à elle-même, son pôle décrira une droite passant par l'origine des coordonnées.* »

Si au contraire n est constante, et m variable, l'équation $b = ma + n$, convient à une série de droites passant toutes par un même point R de l'axe des ordonnées. Mais dans ce cas $y = \frac{1}{An}$ est constant. Le système des deux équations appartient donc à une droite parallèle à l'axe des x, et sur laquelle sont distribués les points O.

Une droite menée par l'origine des coordonnées et par le point O, aurait pour tangente de son angle avec l'axe y, $p' = -\frac{mA}{C}$; or la tangente de l'angle que la droite donnée fait avec le même axe est $p = \frac{1}{m}$; leur produit sera donc $pp' = -\frac{A}{C}$. Donc, si la courbe donnée est une ellipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$, auquel cas $\frac{A}{C} = \frac{a^2}{b^2}$, les deux droites dont il s'agit seront parallèles à deux cordes supplémentaires, et leur point de rencontre K sera sur une autre ellipse ayant l'un de ses sommets à l'origine, et dont le rapport des axes est égal à $\frac{a}{b}$.

L'un des axes de cette ellipse est évidemment la partie de l'axe des y, comprise entre l'origine et le point où cet axe est coupé par la droite donnée. « Si donc on fait varier m seul, le point R demeurera l'extrémité de cet axe, le point K décrira une ellipse semblable à l'ellipse donnée, et le point O une droite parallèle à l'axe des abscisses. »

Si $A = C$, $pp' = -1$; donc dans le cercle, la ligne polaire

est perpendiculaire à la droite qui lui est menée par l'origine des coordonnées et par le pôle.

Assujettissons maintenant le sommet P à glisser sur une courbe du second ordre dont

$$A' b^2 + C' a^2 = 1$$

soit l'équation. On en tire $b' = -\frac{C'a}{A'b}$, et l'on a, pour éliminer a et b les trois équations :

$$pb + qa + r = o. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$A'b^2 + C'a^2 = 1. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$C'pa + A'qb = o. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Éliminant successivement b et a entre la première et la seconde, on obtient

$$a = -\frac{A'qr}{A'q^2 + C'p^2}, \quad b = -\frac{C'pr}{A'q^2 + C'p^2},$$

et ces valeurs substituées dans la seconde conduisent, toute réduction faite, à

$$A'q^2 + B'p^2 + A'B'r^2 = o$$

équation qui appartient aussi à une courbe du second ordre.

Si, comme précédemment, on suppose

$$B = o, \; D = o, \; E = o,$$

les deux courbes données sont concentriques, et comme alors $p = Ay$, $q = Cx$, $r = -1$, l'équation de la courbe trouvée devient

$$A'C^2x^2 + C'A^2y^2 = A'C'.$$

Donc cette courbe est aussi concentrique aux deux autres.

De ce qui précède, on déduit que « *Si le sommet d'un angle circonscrit à une courbe du second ordre, parcourt une autre courbe du second ordre, la corde de tangence reste tangente à une troisième courbe du même ordre, et que, si les deux premières sont concentriques, la dernière le leur est aussi.* »

On a reconnu depuis long-temps que la normale en un point de la courbe est tangente à la développée de cette courbe. On pourra donc rechercher la ligne à laquelle la normale d'une courbe donnée reste tangente dans toutes ses positions, et l'on aura ainsi la développée de la courbe.

Soit $y - b = b' (x - a)$ l'équation de la tangente en un point de la courbe donnée $\varphi(a, b) = o$, celle de la normale pour le même point sera

$$(y - b) b' + x - a = o,$$

a, b étant les coordonnées de la courbe donnée, x et y celles de la normale, qui, pour le point de tangence, seront aussi celles de la courbe cherchée.

On aura donc l'équation de la droite tangente à la courbe cherchée, ou

$$(y - b) b' + x - a = o. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

la relation suivant laquelle varient les quantités a et b, ou

$$\varphi(a, b) = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et les deux équations dérivées $f'(a, b) = o$, et $\varphi'(a, b') = o$, d'où on déduira

$$\pi(a, b) = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

et ces trois équations en donneront par l'élimination de a et b entre elles, une quatrième $F(x, y) = o$, ou l'équation de la développée.

Recherchons par cette méthode la développée des courbes du second ordre, ayant pour équation

$$Ab^2 + Ba^2 = 1.$$

Les équations (1), (2), (3) représenteront

(1) . . . $Bay - Abx + (A - B)ab = o$

(2) . . . . $Ab^2 + Ba^2 = 1$

(3) . $ABby + ABax + (A - B)Ab^2 - (A - B)Ba^2 = o$.

Si l'on multiplie la première par Ab, et la troisième par a, et qu'on retranche les résultats, on obtiendra

$$(A - B)Ba^3 = A(Ab^2 + Ba^2)x;$$

ou

$$(A - B)Ba^3 = Ax,$$

à cause de l'équation (2).

L'élimination de x entre ces mêmes équations fournira

$$(A - B)Bb^3 = - By;$$

par conséquent

$$a = \frac{A^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}}{(A - B)^{\frac{1}{3}} B^{\frac{1}{3}}};\ b = -\frac{B^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{(A - B)^{\frac{1}{3}} A^{\frac{1}{3}}}$$

et ces valeurs substituées dans la relation (2) donnent

$$\frac{A^{\frac{1}{3}} B^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}}}{(A - B)^{\frac{2}{3}}} + \frac{A^{\frac{2}{3}} B^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}}{(A - B)^{\frac{2}{3}}} = 1$$

pour l'équation des courbes du second ordre douées d'un centre.

MÉCANIQUE ANALITIQUE.

Rotation d'une chaîne; suite du mémoire de M. PAGANI (voyez les numéros précédens de la *Corresp. math.*).

Examinons enfin l'état permanent du mouvement de rotation d'une chaîne homogène AMBA, (*fig.* 5 pl. V.), attachée par ses deux bouts à l'extrémité A du fil flexible AO, dont l'autre extrémité O est fixée à l'axe vertical de la roue horizontale dont la vitesse angulaire est toujours représentée par θ.

Lorsque la chaîne sera parvenue à un état permanent de mouvement, son centre de gravité G se trouvera sur la verticale qui passe par le point O. Pour avoir alors l'équation de la courbe formée par la chaîne, nous rapporterons chacun de ses points à trois axes rectangulaires x, y, z, qui se coupent au centre G, en prenant la droite GA pour axe des x, la perpendiculaire au plan AGO pour celui des y, et l'axe des z positif, de manière que l'angle OGZ soit plus grand qu'un angle droit.

Nommons Σ l'épaisseur constante de la chaîne, ds l'élément Mm de la courbe, r la distance du point M à l'axe de rotation GO, et v la verticale élevée du point M à un point fixe. Les forces accélératrices qui sollicitent l'élément M$m = \Sigma ds$ sont: 1° la gravité g qui tend à augmenter la droite v; 2° la force centrifuge $\theta^2 r$ qui tend à augmenter la distance r. Par conséquent l'on aura, d'après le principe des vitesses virtuelles, l'équation

$$(n) \qquad \int (g\delta v + \theta^2 r\delta r)\, \Sigma ds - \int \lambda \delta . ds = 0,$$

dans laquelle λ exprime la tension qu'éprouve l'élément Σds.

Pour déduire de cette équation, les équations différentielles

des projections de la courbe, il est nécessaire, avant tout, d'exprimer les quantités δv, $r\delta r$, et $\delta . ds$, en fonctions des coordonnées x, y, z, du point M. Il est cependant bon de remarquer que l'on doit avoir

$$\frac{d\lambda}{\Sigma} = -g\delta v - \theta^2 r\delta r,$$

d'où, en intégrant,

$$(p) \qquad \frac{\lambda}{\Sigma} = \text{const.} - gv - \frac{\theta^2 r^2}{2};$$

et cette équation donnera, dans tous les cas, la valeur de la tension en fonction algébrique des coordonnées x, y, z.

Maintenant cherchons les expressions des quantités δv, $r\delta r$, en commençant par la première.

Si nous dénotons, comme précédemment, par α l'angle AGO, et si nous observons que la droite v doit être parallèle au plan des x, z, nous aurons d'abord

$$v = \sqrt{(a-x)^2 + (b+z)^2},$$

en dénotant par a et $-b$ les coordonnées x et z du point fixe, qui est comme l'origine de la droite v.

En différentiant cette valeur de v, on aura

$$\delta v = \frac{b+z}{v}\delta z - \frac{a-x}{v}\delta x.$$

Mais, la droite v étant parallèle à la droite GO, on doit avoir

$$\frac{a-x}{v} = \cos.\alpha, \quad \frac{b+z}{v} = \sin.\alpha;$$

par conséquent

$$(q) \qquad \delta v = \delta z \sin.\alpha - \delta x \cos.\alpha,$$

et en intégrant de nouveau,

$$(r) \qquad v = z \sin.\alpha - x \cos.\alpha + \text{const.}$$

On obtiendra aisément l'expression de r^2 et, par suite, celle de $r\delta r$, en observant que r est la plus courte distance du point M à la verticale GO. En effet, dénotons par x', z' les coordonnées du point de l'axe GO par où passe le rayon vecteur r; cet axe étant dans le plan des x, z, nous aurons d'abord

$$(s) \qquad z' = -x' \operatorname{tang.}\alpha$$

$$(t) \qquad r^2 = y^2 + (x - x')^2 + (z - z')^2;$$

et puisque r^2 doit être un *minimum*, nous devons avoir

$$\frac{dr}{dx'}dx' + \frac{dr}{dz'}dz' = o;$$

ce qui nous fournit

$$(x - x')\,dx' + (z - z')\,dz' = o.$$

Cette équation étant combinée avec l'équation (s), conduira sans peine à ces expressions

$$z - z' = \frac{z + x \operatorname{tang.}\alpha}{1 + \operatorname{tang.}^2\alpha}$$

$$x - x' = \left(\frac{z + x \operatorname{tang.}\alpha}{1 + \operatorname{tang.}^2\alpha}\right) \operatorname{tang.}\alpha.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (t), on aura

$$(v) \qquad r^2 = y^2 + (x \sin.\alpha + z \cos.\alpha)^2;$$

d'où

$$(x) \qquad r\delta r = y\delta y + (x \sin.\alpha + z \cos.\alpha)(\delta x \sin.\alpha + \delta z \cos.\alpha).$$

Au moyen des valeurs données par les formules (q) et (x), on obtient

$$g\delta v + \theta^2 r\delta r = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

en faisant pour abréger,

$$(y)\left\{\begin{array}{l} X = \theta^2 (x \sin. \alpha + z \cos. \alpha) \sin. \alpha - g \cos. \alpha \\ Y = \theta^2 y \\ Z = \theta^2 (x \sin. \alpha + z \cos. \alpha) \cos. \alpha + g \sin. \alpha; \end{array}\right.$$

et l'équation d'équilibre (u) deviendra

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, \Sigma ds - \int \lambda \delta . ds = o.$$

En opérant maintenant sur cette équation d'après la méthode des variations, on trouvera les suivantes

$$\frac{\lambda}{\Sigma} = \text{const.} - \int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$(z)\left\{\begin{array}{l} \frac{\lambda}{\Sigma}\frac{dx^2}{ds^2}\, d.\frac{dy}{dx} = Xdy - Ydx \\ \frac{\lambda}{\Sigma}\frac{dx^2}{ds^2}\, d.\frac{dz}{dx} = Xdz - Zdx. \end{array}\right.$$

La première de ces équations doit coïncider avec l'équation (p) qui se déduit immédiatement de l'équation (n). En effet, si nous substituons, dans la première, les valeurs de X, Y, et Z, fournies par les formules (y), et si nous intégrons ensuite, nous trouverons

$$(p') \qquad \frac{\lambda}{\Sigma} = C + g (x \cos. \alpha - z \sin. \alpha)$$

$$- \frac{\theta^2}{2} [y^2 + (x \sin. \alpha + z \cos. \alpha)^2];$$

résultat conforme à celui que l'on aurait en substituant dans la

formule (p) les valeurs de v et de r^2 données par les équations (r) et (v).

Substituons enfin, dans les équations (z), les valeurs de X, Y, Z, d'après les formules (y), et la valeur de λ donnée par l'équation (p'); nous aurons, en posant

$$\frac{dy}{dx}=p, \frac{dz}{dx}=q,$$

ce qui donne

$$\frac{ds^2}{dx^2}=1+p^2+q^2,$$

$$\frac{dp}{1+p^2+q^2}=\frac{[\theta^2(x\sin.\alpha+z\cos.\alpha)\sin.\alpha-g\cos.\alpha]dy-\theta^2ydx}{C+g(x\cos.\alpha-z\sin.\alpha)-\frac{\theta^2}{2}[y^2+(x\sin.\alpha+z\cos.\alpha)^2]}$$

(q')

$$\frac{dq}{1+p^2+q^2}=\frac{\theta^2(x\sin.\alpha+z\cos.\alpha)(dz\sin.\alpha-dx\cos.\alpha)-g(dx\sin.\alpha+dz\cos.\alpha)}{C+g(x\cos.\alpha-z\sin.\alpha)-\frac{\theta^2}{2}[y^2+(x\sin.\alpha+z\cos.\alpha)^2]}$$

Telles sont les équations différentielles de la courbe formée par la chaîne. Mais il ne paraît pas que l'on puisse les intégrer dans toute leur généralité; et pour cette raison, nous nous bornerons à l'examen de quelques cas particuliers.

L'hypothèse la plus simple consiste à faire $g=o$, et $\alpha=90^0$; ce qui revient à supposer que la chaîne est posée sur un plan horizontal qui tourne uniformément autour de la verticale menée par le centre de gravité de la chaîne. Alors il est évident que l'on aura $z=o$ pour tous les points de la chaîne; et par conséquent il suffira de considérer l'équation (p') et la première des équations (q') en y faisant $q=o$. Nous aurons donc

$$\frac{\lambda}{\Sigma}=c-\frac{\theta^2}{2}(y^2+x^2)$$

$$\frac{dp}{1+p^2}=\frac{\theta^2(xdy-ydx)}{c-\frac{\theta^2}{2}(y^2+x^2)}$$

Cette dernière équation s'accorde avec celle d'un cercle dont le rayon est a, c'est-à-dire avec celle-ci

$$y^2 + x^2 = a^2$$

en prenant

$$C = \frac{3}{2} \theta^2 a^2;$$

ce qui nous fournit

$$\frac{\lambda}{\Sigma} = a^2 \theta^2$$

$$\frac{dp}{1 + p^2} = \frac{xdy - ydx}{y^2 + x^2}.$$

En intégrant cette dernière on trouve

$$p = -\frac{x}{y}$$

ou bien $$ydy + xdx = o,$$

d'où $$y^2 + x^2 = a^2;$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons supposé.

La valeur de $\frac{\lambda}{\Sigma}$ que nous venons de trouver nous met en état de résoudre la question suivante.

Une corde homogène entoure une roue horizontale dont le rayon est a. La roue tourne uniformément autour de son axe, de manière que dans un nombre t de secondes elle fait un nombre n de tours. On demande le rapport entre le poids de la corde et celui qu'elle supporte en chaque point, en vertu de la force centrifuge.

En nommant Σ l'épaisseur de la corde, ou, pour mieux dire, l'aire d'une section perpendiculaire à sa longueur, P son poids,

et θ la vitesse angulaire de la roue; nous aurons d'abord la tension λ de la corde par cette formule

$$\lambda = \Sigma a^2 \theta^2.$$

D'un autre côté on doit avoir

$$\theta = \frac{2\pi n}{t}, \quad P = 2\pi a \Sigma g.$$

Partant $$\lambda : P :: \Sigma a^2 \theta^2 : 2\pi a \Sigma g,$$

ou bien, en mettant la valeur de θ, et en réduisant,

$$\lambda : P :: \frac{2\pi a n^2}{t^2} : g.$$

Pour que la tension fût en chaque point égale au poids même de la corde, on devrait avoir

$$\frac{n}{t} = \sqrt{\frac{g}{2\pi a}}.$$

Nous allons enfin examiner le cas où la chaîne est tout entière dans un plan vertical; et pour cela, il suffira de faire $\alpha = o$ dans les formules (p') et (q'). Mais si nous prenons le plan des x, y pour celui de la chaîne, nous pourrons faire $z = o$, $q = o$ dans ces formules, et nous aurons seulement à considérer les deux équations

$$\frac{\lambda}{\Sigma} = C + gx - \frac{\theta^2}{2} y^2$$

$$\frac{dp}{1 + p^2} = -\frac{gdy + \theta^2 y dx}{C + gx - \frac{\theta^2}{2} y^2}.$$

Quoique cette dernière équation soit d'une forme assez sim-

ple, les méthodes connues sont insuffisantes pour conduire à son intégrale algébrique. Mais si nous voulons négliger θ par rapport à g, ou g par rapport à θ, nous pourrons alors intégrer. Dans le premier cas, on trouve l'équation connue de la chaînette, et dans le second cas l'intégrale seconde de l'équation dépend des transcendantes elliptiques. En effet, la dernière équation devient, en y faisant $g = o$,

$$\frac{dp}{1+p^2} = \frac{\theta^2 y dx}{\frac{\theta^2}{2}y^2 - C}$$

ou bien, en changeant la constante $-C$ en $+\frac{C}{2}$,

$$\frac{dp}{1+p^2} = \frac{2\theta^2 y dx}{\theta^2 y^2 + C}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $p = \frac{dy}{dx}$, et nous aurons

$$\frac{pdp}{1+p^2} = \frac{2\theta^2 y dy}{\theta^2 y^2 + C},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{1}{2}\log.(1+p^2) = \log. C'(C+\theta^2 y^2),$$

C' étant une nouvelle constante arbitraire.

En passant des logarithmes aux nombres, on a

$$1 + p^2 = C'^2 (C + \theta^2 y^2)^2;$$

d'où

$$p = \sqrt{C'^2 (C+\theta^2 y^2)^2 - 1},$$

ou bien

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C'^2 (C+\theta^2 y^2)^2 - 1}}.$$

L'intégration de cette dernière expression étant dépendante des transcendantes elliptiques, on voit qu'à plus forte raison il est impossible d'intégrer les équations (q') dans d'autres cas plus compliqués que ceux que nous venons d'analiser.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE.

Description de plusieurs observatoires d'Angleterre (1).

OBSERVATOIRE DE GREENWICH.

Après avoir dépassé l'École Royale d'artillerie et les riches arsenaux de Woolwich, l'étranger qui remonte la Tamise, aperçoit en même temps sur sa gauche, avant d'entrer à Londres, le magnifique hospice des invalides de la marine et l'observatoire royal situé sur une colline qui domine cet édifice; comme si, dès son arrivée, on avait voulu étaler à ses yeux les moyens sur lesquels se fonde la puissance britannique, les récompenses qu'on réserve à la valeur et le prix qu'on attache aux sciences. L'observatoire royal de Greenwich fut

(1) On pourra voir aussi dans le III[e] vol. de la *Correspondance mathématique*, une notice de M. *Lohrmann* de Dresde sur les principaux observatoires d'Allemagne. Les personnes qui désireraient de plus amples renseignemens historiques pourront recourir aux descriptions particulières publiées en anglais, à l'*Histoire des mathématiques* de *Montucla*, à l'*Histoire* de l'*Astronomie au* 18[e] *siècle ;* par *Delambre*, etc. Nous avons eu plus particulièrement en vue de faire connaitre les plans des principaux observatoires d'Angleterre, et de former ainsi une espèce de complément aux articles intéressans que M. *Gautier* a insérés dans la *Bibliothéque Universelle*.

fondé dans l'année 1675 par le roi Charles II, et la direction en fut confiée dès lors au célèbre *Flamsteed* (1). Il paraît que, l'année suivante, cet astronome y commença ses travaux (2): il avait amené successivement de Derby, sa patrie, divers instrumens qu'il avait fait construire à ses frais, et qui furent, après sa mort, revendiqués par sa veuve. On pourra voir, dans l'*Histoire de l'Astronomie* de *Delambre*, les contrariétés que lui fit éprouver l'inexactitude de leur construction. Ce qui pourra paraître surprenant, c'est que la munificence royale qui avait fait bâtir l'observatoire, eut négligé d'y mettre les instrumens nécessaires à sa destination. *Flamsteed* dut à la générosité de son ami *Jones Moore* deux pendules et un sextant de six pieds; il fit construire lui-même, à ses dépens, un arc mural,

---

(1) Voici ce qui donna lieu à sa construction : « Vers l'an 1673, un nommé le sieur *De St-Pierre* se présenta à la cour de Charles II, annonçant la découverte des longitudes, et il obtint qu'on nommât des commissaires de l'amirauté pour examiner son invention. Ceux-ci travaillant à cet examen, admirent dans leurs assemblées divers mathématiciens habiles, entr'autres M. *Flamsteed*. Cet astronome, encore jeune alors (il avait 27 ans), mais qui avait déjà donné des preuves d'un talent supérieur, montra facilement que l'invention proposée était insuffisante, parce que ni les tables des lieux des fixes, ni la théorie de la lune, que le sieur *De St-Pierre* employait à l'exemple de *Morin*, n'avaient acquis assez de perfection pour pouvoir compter sur elles. Il écrivit sur ce sujet deux lettres, l'une adressée aux commissaires, l'autre à l'auteur du projet, pour étendre et confirmer davantage ce qu'il avait dit. Cette affaire fit beaucoup de bruit à la cour; par l'intérêt qu'y prenait la fameuse duchesse de *Portsmouth*, dont le sieur *De St-Pierre* avait gagné la faveur, et les deux lettres de *Flamsteed* étant tombées entre les mains de Charles II, il en fut étonné et il ordonna aussi-tôt qu'on perfectionnât ces parties de l'astronomie pour l'utilité de la marine. On lui représenta que ce travail exigeait un homme entier et des secours que l'astronomie n'avait point encore eus; sur quoi il ordonna la construction d'un observatoire, et il choisit lui-même, pour y observer, M. *Flamsteed*, le nommant son astronome, etc. » Montucla, *histoire des mathématiques*, tome 11, page 558. La date de la construction que donne *Montucla* ne s'accorde pas avec celle donnée par *Delambre*. Voici ce que dit le premier historien : « Les fondemens en furent posés le 10 avril 1675, et il fut achevé en 1679. »

(2) Delambre, *Histoire de l'astronomie* au 18e siècle, page 104.

qu'il fit retoucher plus tard par un habile artiste, *Abraham Sharp*, qu'il s'était adjoint comme aide. Il avait témoigné le désir d'avoir un quart de cercle mural; « mais un de ses confrères à la société royale, *qui avait l'habitude de vanter beaucoup ses inventions*, voulut être chargé d'en diriger la construction. Quand elle fut achevée, *Flamsteed* jugea que l'instrument ne pourrait servir; c'est ce que l'expérience vérifia (1). » Ces contrariétés sont d'autant plus sensibles à l'observateur, que rarement on l'en dédommage ensuite par une nouvelle acquisition plus conforme à ses besoins. Il ne faut donc pas s'attendre à trouver aujourd'hui à l'observatoire royal de Greenwich des instrumens qui ont été employés par l'astronome qui a contribué le premier à son illustration.

Un autre fait assez remarquable, c'est qu'on ne songea à faire imprimer les observations de *Flamsteed* que 30 ans après son entrée à l'observatoire; de sorte qu'on faillit, par une négligence inconcevable, perdre le fruit des travaux de ce grand astronome; c'est, du reste, ce qui arriva à l'égard de *Halley*, qui succéda à *Flamsteed* et occupa sa place jusqu'en 1742. Les sciences coururent encore risque de faire une semblable perte à la mort de *Bradley*, qui fut le troisième astronome qui contribua à l'illustration de l'observatoire de Greenwich. « A sa mort, ses héritiers enlevèrent tous ses manuscrits, qu'ils considérèrent comme sa propriété particulière. L'astronome royal les fit réclamer par la commission des longitudes. Après plusieurs réponses évasives, les héritiers déclarèrent qu'ils ne se dessaisiraient des manuscrits que sur l'assurance d'une indemnité considérable (2) ».

---

(1) Delambre *Histoire de l'astronomie* au 18e siècle, page 105.

(2) *Histoire de l'astronomie*, page 421. Delambre rapporte un fait assez curieux. « Le roi lui accorda une pension de 250 livres sterling; la reine étant venue visiter l'observatoire, et s'étant informée du traitement de l'astronome, avait témoigné l'envie de faire augmenter ce traitement; *Bradley* la supplia de n'en rien faire, de peur que, *si la place valait quelque chose, on ne la donnât plus à un astronome.* »

Les observations parurent enfin 40 ans après la mort de *Bradley*, en même temps que celles de *Bliss*, son successeur, pour lesquelles il fallut encore transiger avec des héritiers. Ces exemples, joints à tant d'autres, que nous présentent malheureusement les fastes de l'astronomie, montrent assez combien il est important de ne point trop différer la publication des observations astronomiques. En fondant les observatoires, dit *Delambre*, on oublia un article bien plus essentiel que ce luxe de constructions, déployé si vainement dans quelques-uns de ces bâtimens : on suivit les idées des architectes de préférence à celles des astronomes; on fit beaucoup de dépenses au moins inutiles, et l'on négligea d'assigner les fonds qui auraient suffi à l'impression successive des observations de chaque année. *Maskelyne*, qui fut le cinquième directeur de l'observatoire, et qui prolongea sa glorieuse carrière jusqu'en 1811, obtint du conseil de la société royale de Londres que toutes les observations seraient imprimées désormais par cahiers et d'année en année.

On peut voir, dans le dessin joint à cette notice, la forme de l'observatoire de Greenwich tel qu'il existe encore aujourd'hui. La majeure partie de cet édifice est réservée à l'habitation des astronomes; les instrumens fixes, tels que la lunette méridienne et les cercles méridiens se trouvent dans un bâtiment séparé, d'une construction extrêmement simple, mais répondant suffisamment aux besoins de l'astronomie. On observe aussi, dans un des pavillons du jardin, les variations de l'aiguille aimantée. La grande salle octogone *b* de l'observatoire sert à la fois de bibliothéque et de dépôt pour plusieurs instrumens, qui sont rarement employés, ou que l'on ne conserve que pour l'histoire de la science. Les tourelles à toit tournant, contiennent un équatorial de *Ramsden* et un secteur équatorial de 5 pieds. On s'occupe de placer sur le devant de l'observatoire un secteur zénithal d'une dimension considérable, destiné à l'observation de l'étoile γ du dragon.

Les plus beaux instrumens de l'observatoire royal sont, sans contredit, la lunette méridienne et les deux cercles mé-

ridiens. Le premier de ces deux instrumens fut placé en 1816; il est du célèbre artiste *Troughton*, qui en a fait un semblable pour l'observatoire de Cambrigde; sa distance focale est de 10 pieds, et son ouverture de 5, l'axe horizontal, y compris les tourillons, est de 3 pieds 10 pouces; le prix en a été de 17000 francs. Cet instrument colossal est muni de contre-poids, pour empêcher les tourillons de fléchir sous son poids, qu'on peut évaluer à 100 livres. Les tourillons qui étaient d'abord de bronze, ayant souffert une altération de forme, ont été remplacés depuis par d'autres en acier. Quatre tubes de cuivre, disposés en parallélogramme, joignent les extrémités de la lunette aux deux cônes qui forment l'axe, afin d'empêcher par leur ensemble la flexion de l'instrument, quand on observe à l'horizon. Avant la construction de cet instrument, le moyen qu'on employait pour observer à une hauteur déterminée, consistait à fixer un demi-cercle gradué à l'un des piliers qui servent de support, et un index à l'axe de la lunette pour marquer son mouvement angulaire. Mais cet appareil, à plusieurs inconvéniens, réunissait celui de rendre extrêmement difficiles les observations de deux astres qui, avec des déclinaisons différentes, devaient se présenter presqu'en même temps au méridien. Pour obvier à cet inconvénient, l'artiste a imaginé un appareil aussi simple qu'ingénieux : il consiste en deux cercles complets, fixement attachés au porte-oculaire de la lunette; chaque cercle est muni de deux verniers, qui donnent les divisions en minutes de degré, l'index est de plus garni d'un niveau très-sensible; quand cet index marque la position d'un astre, on tourne la lunette jusqu'à ce que le niveau soit horizontal, l'astre alors passe dans le voisinage des fils, il arrive de là que si par accident on déplace la lunette pendant l'observation, on peut aussitôt la ramener vers l'astre. Le second cercle permet de faire une seconde observation immédiatement après une première, il suffit d'avoir placé d'avance convenablement l'index qui porte le deuxième niveau.

Dans une chambre voisine de celle où se trouve la lunette méridienne, on voit sur deux massifs opposés les deux cercles

méridiens : chacun de ces instrumens a six pieds de diamètre, et tourne en même temps que la lunette qui y est fixement attachée; six micromètres sont placés à 60 degrés de distance les uns des autres et sont portés sur le massif. L'un de ces cercles a été construit par *Jones*, et l'autre par *Troughton;* on s'en sert ordinairement en même temps pour observer les astres directement et par réflexion à la surface d'un horizon de mercure. M. *Pond,* qui dirige actuellement l'observatoire et qui s'est montré par ses travaux le digne successeur des *Flamsteed*, des *Halley*, des *Bradley*, des *Maskelyne*, se loue beaucoup de ce mode d'observation qu'il recommande particulièrement pour les hauteurs méridiennes.

Le cercle de *Troughton* avait été demandé du vivant de *Maskelyne*, qui voulait s'en servir parce qu'il commençait à soupçonner l'exactitude de son quart de cercle; mais cet habile astronome ne jouit pas du plaisir de voir son nouvel instrument en place; ce n'est qu'au mois de juin 1812 que M. *Pond* a commencé à s'en servir.

On ne voit pas sans une curiosité mêlée d'un sentiment de respect le secteur de Graham, avec lequel Bradley a fait ses deux découvertes immortelles de la nutation et de l'aberration. On remarque aussi à Greenwich deux quarts de cercle muraux de Graham et de Bird, ainsi qu'un secteur de Ramsden.

Les fentes par lesquelles on observe avec les instrumens fixes placés dans le plan du méridien, sont garnies de panneaux de bois qui glissent des deux côtés dans l'épaisseur des murs et du toit, au moyen de cordes qui passent sur des poulies de renvoi. Cette disposition permet, quand l'air est trop agité, de n'ouvrir que la partie strictement nécessaire pour l'observation. On a aussi placé au-dessus de la lunette méridienne un appareil propre à opérer facilement et sans danger le retournement de cet instrument.

La manière dont se font les observations n'est pas ce que l'on admire le moins à Greenwich; plusieurs adjoints, sous la dépendance immédiate du directeur, travaillent et se relèvent successivement avec une exactitude précieuse pour la science.

C'est dans cet observatoire qu'on peut surtout apprécier les avantages d'une bonne administration. Quoique l'état presque continuellement maladif de M. *Pond* ne lui permette pas d'observer avec assiduité, cependant telle est la direction qu'il sait donner aux travaux de l'établissement qui lui est confié, que jamais les observations n'y ont été plus nombreuses ni publiées avec plus de régularité. Peu d'établissemens offrent depuis leur création une série d'hommes plus distingués que l'observatoire de Greenwich; aussi l'on ne saurait trop apprécier la noble indépendance qui est accordée au directeur, et qui lui permet de donner de la suite et de l'unité à ses travaux.

OBSERVATOIRE DE KENSINGTON.

L'observatoire de Kensington compte à peine une année et demie d'existence; il est bâti sur une légère colline, hors des murs de Londres, et dans une direction diamétralement opposée à celle de l'observatoire royal. M. South, qui l'a fait construire à ses frais, observait d'abord dans *Blackman-street*, quartier populeux qui semblait moins bien approprié à ses besoins (1); il quitta cette position en 1824, pour venir s'établir avec ses instrumens à Passy, près de Paris, où il acheva son beau travail sur les étoiles doubles et multiples qu'il avait commencé avec M. Herschel fils. A son retour en Angleterre, M. South s'occupa de chercher un nouvel emplacement pour son observatoire; il fut question pendant quelque temps d'obtenir un terrain dans le parc St.-James, endroit que l'on avait déjà eu en vue lors de la création de l'observatoire royal. Il atta-

(1) « The observatory being situated in one of the principal manufacturing, » as well as in one of the most populous districts of the metropolis, the instru» ments ware exposed to the inconveniences of soot falling upon them, from » the chimneys, of the neighbouring houses, steam engines, etc. *Philosophical transactions*; 1826.

chait à sa demande la condition généreuse de laisser, après sa mort, au gouvernement la riche collection d'instrumens dont il s'était servi dans ses recherches; mais fatigué par les lenteurs et les contrariétés qu'il éprouva, il tourna ses vues d'un autre côté. Avec son incroyable activité, sa passion pour l'astronomie et ses moyens pour la satisfaire, il ne fut pas long-temps à prendre une détermination; vingt-quatre heures suffirent pour choisir un terrain, pour en faire l'acquisition et pour mettre les ouvriers au travail; l'observatoire fut construit quelques mois après la pose de la première pierre; le jour même où les travaux cessèrent, la lunette méridienne fut mise en place et les observations commencèrent. Cette extrême rapidité dans l'exécution n'est certes pas un résultat de la jactance, mais un effet d'une âme ardente, entièrement dévouée à la science et qui connaît tout le prix du temps. C'est dans de pareilles circonstances que l'observateur peut bien apprécier la valeur d'une fortune considérable; ce qu'il juge utile à la science, il l'exécute sur-le-champ: le plan de travail qu'il se propose, il n'est pas forcé de le modifier sur les idées d'un autre; sans contrainte, sans inquiétude sur l'avenir comme sur le passé, il trouve dans son indépendance les moyens d'assurer la réussite de ses travaux et de doubler son existence.

L'observatoire est entièrement séparé du bâtiment qu'habite M. *South*, il en est cependant assez rapproché pour ne pas nuire à la commodité des observations; il présente un développement de 54 pieds anglais sur une profondeur de 18; et se compose, comme l'indique le plan ci-joint, de cinq salles qui communiquent les unes aux autres par des portes latérales. Celles qui se trouvent aux extrémités du bâtiment sont moins élevées que les autres; l'une sert de bibliothéque et l'autre de chambre de repos; elles contiennent aussi quelques instrumens mobiles de petite dimension. La salle du milieu dont le sol est plus élevé que celui des pièces voisines, renferme un équatorial de 7 à 8 pieds de long, placé sous un toit tournant qui est porté sur douze roulettes de fer; ce bel instrument a été construit par *Dollond* et *Troughton*, sous la direction du capitaine *Huddart*;

le grand axe, parallèle à l'axe de la terre, est formé de deux demi-cylindres creux, en fer blanc verni, écartés parallélement de manière que les sections planes se regardent; c'est entre ces sections planes que se meut la lunette enchâssée dans une espèce de tambour de fer blanc d'environ 4 pieds de diamètre et de 6 pouces d'épaisseur. L'une des faces de ce tambour est bordée d'un limbe circulaire en laiton, pour l'estimation de la déclinaison des astres. Le cercle qui sert à mesurer les ascensions droites est d'environ 3 pieds de diamètre, et se trouve fixé à la partie inférieure du grand axe dont les extrémités sont réunies par des pièces de fer reposant sur deux massifs. Cet équatorial est aussi remarquable par son extrême légèreté que par la facilité avec laquelle il se prête à l'observation. L'objectif qui est d'une rare perfection comporte de très-forts grossissemens; le micromètre à fil de *Troughton* est également fait avec un soin remarquable, c'est avec cet instrument que M. *South* a fait, conjointement avec M. *Herschel* la plupart de ses observations sur les étoiles multiples; observations qui ont mérité à ces habiles observateurs la médaille fondée par *Lalande*, que leur a décernée l'Académie royale des sciences de Paris.

Dans la salle à droite de celle qui renferme l'équatorial, est placée la lunette méridienne qui attire l'attention par la simplicité et l'élégance de ses formes; elle est construite à peu près sur le modèle de celle de Greenwick, mais avec des modifications que l'habile artiste qui en est l'auteur, a jugé convenable d'y faire. Nous tâcherons de donner une idée de ce bel instrument, qui a été décrit par M. *South* dans un Mémoire inséré dans les *Transactions philosophiques* pour 1826 (1). La lunette et l'axe sont formés de quatre tubes coniques dont les bases s'appuient sur une pièce centrale de forme sphérique, les quatre sixièmes environ de cette pièce disparaissent sous les cônes tronqués, de sorte que l'on pourrait craindre qu'elle ne se

(1) « On the discordances between the sun's observed and computed right ascensions, etc. »

trouvât affaiblie par les ouvertures qui y sont pratiquées. Mais outre les quatre tubes de cuivre qui, comme dans la lunette de Greenwich, assujettissent les extrémités de la lunette aux deux parties de l'axe, pour empêcher la flexion, dans l'intérieur de l'instrument sont placées dix barres, que *Troughton* nomme *barres de tension* et dont six traversent la sphère centrale dans la direction de l'axe, et quatre autres dans la direction de la lunette; les barres sont assujetties au centre par des cercles de cuivre et par un mécanisme particulier. Près de l'oculaire sont fixés, comme à l'instrument de l'observatoire royal, deux cercles avec des index et des niveaux pour diriger d'avance la lunette vers les astres que l'on veut observer; l'éclairage des fils se fait par l'axe; quant à l'objectif, il a quatre pouces d'ouverture sur sept pieds deux pouces de distance focale. Chacun des tourillons tourne entre deux plans inclinés que présentent des plaques de cuivre; l'une de ces plaques peut prendre un mouvement horizontal, et l'autre un mouvement vertical; de plus on a placé aux tourillons deux contre-poids qui fonctionnent par des bras de leviers, et qui présentent ainsi très-peu de volume. L'instrument fut mis en place vers le milieu de 1820, et M. *South* assure que dans ses nombreuses observations il n'a jamais eu qu'à se louer de son exactitude et de sa fixité. Cet habile astronome prétend même qu'il n'a pas besoin de prendre les précautions ordinaires dont on use pour se garantir des influences des rayons du soleil, quand l'astre va passer au méridien (1). Je pus moi-même, sur son invitation, m'assurer de l'exactitude de son assertion. Les deux piliers qui portent l'instrument ont un pied d'épaisseur sur deux de largeur; ils se trouvent enchâssés dans une grande pierre disposée horizontalement sur le sol.

M. *South* n'emploie point de mire pour vérifier la position de sa lunette méridienne, il préfère à ce moyen l'observation des doubles passages des étoiles circompolaires. Comme les salles d'observation ont peu de hauteur, on a pu construire des

(1) Voyez le Mémoire cité précédemment, pages 15 et suivantes.

trappes simples qu'on soulève par deux tringles de fer, et des fenêtres qui s'ouvrent d'une pièce dans toute leur hauteur. Les fentes, dans la direction du méridien, ont d'un pied et demi à deux pieds d'ouverture; au-dessus de la lunette méridienne est un appareil très-simple pour opérer le retournement de l'instrument. Dans la salle opposée à celle où se trouve la lunette méridienne, est le *westbury-circle*, instrument qui sert à la mesure des hauteurs; il est construit comme les autres instrumens de l'observatoire, par le célèbre *Troughton*, circonstance que M. *South* aime à relever avec un sentiment de satisfaction et de fierté, inspiré par le talent de l'artiste et par l'amitié qui l'unit à lui: jamais hommes en effet n'étaient mieux faits pour s'entendre et pour apprécier le mérite l'un de l'autre. Le *westbury-circle* est composé de deux cercles gradués et assemblés parallèlement par des rayons horizontaux. La lunette, qui se meut dans le plan du méridien, est insérée entre ces deux cercles; et l'axe de l'instrument repose par deux tourillons sur des massifs en pierre; les cercles ont de trois à trois pieds et demi de diamètre. M. *South* a fait placer nouvellement six micromètres à fils à chacune des faces de l'instrument, de manière à faire douze lectures à chaque observation; il ne faut rien moins que l'adresse et le courage de cet habile observateur pour s'imposer de pareilles conditions.

Les pendules, placées près des instrumens fixes, sont à la gauche de l'observateur quand il est tourné vers le midi. Elles sont un peu en avant des instrumens, et disposées obliquement, de manière que le pendule oscille dans un plan formant un angle d'environ 45° avec le méridien.

C'est à l'observatoire de Kensington que j'ai vu pour la première fois les lunettes de M. Barlow, dans lesquelles l'achromatisme est produit au moyen d'un liquide. L'instrument se compose d'un oculaire et d'un objectif simple qui se trouvent à ses deux extrémités. Une deuxième lentille renfermant le liquide est placée aux deux tiers de la lunette à partir de l'objectif (1). On pou-

(1) Voyez la *Correspondance Mathématique*, tom. III, p. 209.

vait se servir sans inconvénient d'un grossissement de 180, et les astres étaient suffisamment bien déterminés. Nous avons appris depuis que de nouveaux essais ont été faits avec plus de succès encore, et tout fait espérer que M. *Barlow* ne rendra pas moins de services à l'optique qu'il n'en a rendus au magnétisme par ses brillantes recherches. Les lentilles qui servent aux nouvelles lunettes avaient été construites à Woodfort, près de Londres, dans le bel établissement de M. *Guilbert* (1).

La reconnaissance me fait un devoir de remercier ici M. *South*, pour l'accueil amical qu'il a bien voulu me faire à Londres, et pour les services signalés qu'il m'a rendus dans cette ville, où je m'étais rendu par ordre du gouvernement des Pays-Bas, pour l'acquisition de plusieurs des instrumens destinés au nouvel observatoire de Bruxelles (2). Son extrême obligeance m'a été précieuse dans cette rencontre, et je me rappellerai toujours avec bonheur les jours que j'ai passés à Kensington. Si mes foibles moyens parviennent à fixer l'attention sur l'observatoire qui m'est confié, j'espère qu'on n'y répétera jamais sans reconnaissance le nom de M. *South*, et celui de M. *Bouvard*, qui ne m'a pas rendu moins de services, et qui fut toujours pour moi un véritable ami, un père.

OBSERVATOIRE D'ÉDIMBOURG.

Il existe différentes espèces d'observatoires, si on considère ces établissemens sous le rapport de leur organisation; et peut-

(1) En parlant des observatoires de la capitale de l'Angleterre, je ne dois pas omettre de citer quelques savans qui ont bien voulu me montrer des observatoires particuliers qu'ils avaient établis chez eux, tels que MM. *Wollaston*, *Ed. Sabine*, *F. Baily*, le capitaine *Kater*, etc. M. *Herschel* continue d'observer à *Slough*, si célèbre par les recherches de son père : on doit joindre à ces hommes distingués, qui servent la science par leurs observations comme par leurs écrits, les *Young*, les *Ivory*, les *Babbage*, les *Beaufort*, les *Grégory*, etc., ainsi que madame *Sommerville*, qui s'occupe à la fois avec succès de plusieurs sciences.

(2) *Correspondance Mathématique*, tome III, page 236.



être serait-il intéressant pour la science d'examiner quel est le mode d'organisation le plus avantageux. Les principaux observatoires semblent avoir été jusqu'à présent ceux qui étaient institués par les gouvernemens; ce sont au moins ceux dont l'existence a été le plus durable. Il est vrai que l'intrigue et la médiocrité obtiennent quelquefois ce qui ne devrait être accordé qu'à des hommes laborieux et zélés pour l'avancement de la science; *Bradley* l'avait fort bien senti quand il exprimait la crainte de voir augmenter son traitement pour qu'on ne recherchât pas trop sa place. Cet inconvénient ne s'est du reste pas fait sentir à Greenwich, si l'on considère la succession des hommes illustres qui ont dirigé cet établissement, et cependant le traitement de l'astronome y est maintenant fort élevé. Les observatoires particuliers, du moins ceux qui méritent d'être mentionnés dans l'histoire de la science, ont été peu nombreux jusqu'à présent : le motif en effet s'en conçoit aisément, car à moins de posséder de grandes richesses, d'avoir une existence entièrement indépendante, de la persévérance et une santé robuste, il faut renoncer à observer, quelque passion que l'on pût avoir d'ailleurs pour l'astronomie. Ces conditions s'allient rarement; mais quand on les trouve ensemble, elles produisent presque toujours les plus heureux résultats: sans sortir de l'Angleterre, nous pouvons citer l'exemple de M. *South*, dont nous avons fait connaître l'observatoire qui est à coup sûr un des mieux appropriés aux besoins de l'astronomie. Nous pouvons citer encore en Écosse l'observatoire de M. l'amiral *Brisbane*, qui a servi si utilement les sciences dans son gouvernement à la Nouvelle Hollande (1). Ici du moins on est toujours sûr de trouver cette unité si précieuse dans toutes les recherches; deux ou plusieurs hommes égaux de pouvoir dans un même obser-

---

(1) L'observatoire de M. l'amiral *Brisbane* est établi à Kelso, au sud d'Édimbourg et à quelques lieues de cette ville. Je regrette d'avoir été privé par une circonstance particulière du plaisir de voir cet établissement, qui paraît contenir de beaux instrumens.



vatoire, quel que soit d'ailleurs leur mérite, paralysent souvent leurs efforts au lieu de s'entr'aider. Les observatoires fondés par des sociétés sont plus rares et semblent annoncer une existence moins longue que ceux dont nous venons de parler. La difficulté de s'entendre dans une grande réunion d'hommes, celle de faire face à toutes les dépenses, la position précaire de l'astronome, etc., seront toujours des obstacles au succès de pareils établissemens. Il s'était formé à Glasgow, en 1818, un observatoire construit aux frais d'une société; on l'avait déjà muni de tous les instrumens nécessaires, lorsque, par des motifs que nous ignorons, on prit le singulier parti de vendre le tout à l'enchère. Tout fait espérer que le nouvel observatoire d'Édimbourg, également fondé par une société, aura une existence bien mieux consolidée (1). Cette ville si florissante et si remarquable sous le rapport intellectuel, saura contribuer aux progrès de l'astronomie comme à ceux de toutes les autres branches des connaissances humaines.

L'observatoire construit sur le modèle du temple de Minerve à Athènes, s'élève sur la colline de *Calton-hill* à l'est d'Édimbourg, dans une des positions les plus délicieuses sous le rapport pittoresque (2) : on voit d'un côté la riante vallée qui sépare la nouvelle de l'ancienne ville; de l'autre, on aperçoit le golfe du Forth et ses bords poétiques; vers l'horizon, les monts Pentlands et la vaste mer du nord reposent les regards, tandis qu'autour de soi on aime à contempler tour à tour le monument national écossais, le tombeau de *Playfair*, la colonne de *Nelson* et plusieurs autres monumens qui s'élèvent à côté de l'observatoire. Les fondemens de ce dernier édifice furent posés le 25 avril 1818; M. *Playfair*, neveu du savant qui présidait alors la société, dirigea les travaux comme architecte; je dois à son obligeance de pouvoir publier le plan qui accompagne

---

(1) Les actions de la société sont de 25 guinées.

(2) D'après M. *Gautier*, l'observatoire est élevé de 34 toises au-dessus de ville et de 55 au-dessus de la mer. La latitude serait de 55° 57′ 20″.

cette notice, et qui m'avait été communiqué primitivement par M. *Stratford*, de la société astronomique de Londres.

L'observatoire est de médiocre grandeur, mais la forme en est élégante; il présente vers chacun des quatre points cardinaux un fronton de 28 pieds supporté par six colonnes; la salle d'observation a la forme d'un rectangle, dont le grand côté s'étend dans le sens de l'est à l'ouest; vers le nord, se trouve une place pour les conférences de la société et pour la bibliothèque; l'entrée est vers le sud, où est aussi situé l'escalier qui mène sous le dôme. L'absence d'une demeure pour un astronome rendra toujours l'observation suivie très-difficile; si d'une autre part l'édifice n'est réservé qu'à l'usage des membres de l'institution, la difficulté de s'y transporter du sein de la ville et à toute heure de la nuit, restreindra toujours beaucoup son utilité.

On voit dans l'intérieur de la salle d'observation un massif destiné à supporter un cercle mural, et deux piliers pour une lunette méridienne; à côté de chacun de ces instrumens, on placera une pendule; on a pris aussi les dispositions nécessaires pour observer par réflexion sur un horizon artificiel de mercure. Au centre de la salle, s'élève un pilier conique de 6 pieds de diamètre à la base, et de 19 pieds de hauteur; il est destiné à porter un cercle vertical et azimuthal qui sera recouvert par un toit mobile et tournant sur trois boulets de fer. Le célèbre *Troughton* a été chargé de la construction de la plupart des instrumens; malheureusement ils n'ont encore pu être mis en place, les fonds ayant été absorbés par les frais du bâtiment. Les trappes ont été construites avec beaucoup de soin et s'ouvrent facilement. Au-dessus de la lunette méridienne et du cercle mural, on a placé des panneaux qui glissent sur des roulettes au moyen de cordes et de poulies de renvoi, et qui, en se disposant sous le toit, peuvent laisser le méridien entièrement libre. Les trappes du toit mobile ont la forme de portions de cylindre et glissent dans des coulisses et dans le sens vertical, de sorte qu'en les abaissant toutes du même côté, on peut rendre le ciel presqu'entièrement libre, dans le sens d'un vertical quelcon-

que. On peut, à volonté, ne découvrir qu'une partie du ciel; cette faculté devenait importante dans un lieu qui, par sa hauteur, est très-exposé à la violence des vents.

Les instrumens, par leur communication avec le rocher sur lequel l'édifice est construit, ne seront pas tout-à-fait à l'abri de petites secousses. M. le professeur *Wallace* (1) et M. *Henderson* avec qui je visitai l'observatoire, me montrèrent que des chocs sur le rocher extérieur se propageaient jusque dans le mercure préparé pour les observations; les vibrations se transmettaient aussi jusqu'au haut du pilier conique qui doit porter le cercle vertical. Du reste, on pourra prendre, en cas de besoin, les précautions nécessaires pour que rien ne trouble l'astronome pendant ses observations.

A côté de l'observatoire se trouve encore un cabinet avec quelques instrumens astronomiques; on montre aussi une belle

---

(1) J'ai visité aussi avec ce savant, le lieu ou reposent les cendres de *Mac-Laurin;* le monument élevé dans le cimetière d'une petite église, (*Grey friars church*) ne se compose que d'une simple pierre, avec un encadrement enchassé dans un vieux mur; on y lit les mots suivans :

« Infra situs est
Colin Mac-Laurin
Mathes. olim in acad. Edim. Prof.
Electus ipso Newtono suadente
H. L. P. F.
Non ut nomini paterno consulat
Nam tali auxilio nil eget;
Sed ut in hoc infelici campo
Ubi luctus regnant et pavor
Mortalibus prorsus non absit solatium.
Hujus enim scripta evolve
Mentemque tantarum rerum capacem,
Corpori caduco superstitem crede. »

Tout à côté se trouvent le monument de *Blair*, celui de *Robertson*, de *Pictairn* et de plusieurs autres hommes illustres que l'Écosse s'énorgueillit à juste titre d'avoir produits.

chambre obscure où, par un mécanisme très-simple, on peut jouir du tableau varié de tous les environs.

PHYSIQUE.

Sur les stries d'une forme particulière que présente une flamme agitée; par A. QUETELET.

On s'est beaucoup occupé de toutes les particularités que présente la flamme; je doute cependant qu'on ait fait mention du phénomène suivant, dont l'observation m'a paru très-curieuse.

On sait que la flamme d'une chandelle, quand elle est *tranquille*, prend la forme d'un cône lumineux dont la partie intérieure est obscure; la nappe brillante qu'elle présente est *continue* et transparente (1). Mais si la flamme devient agitée et *tremblotante* (ce qui arrive généralement quand la mèche est un peu longue), elle devient en même temps *discontinue* vers la partie supérieure, et l'on aperçoit dans le sens horizontal des lignes angulaires ou stries alternativement lumineuses et obscures. Les bords de la flamme sont très-sensiblement dentelés à la partie supérieure. On remarque aussi que les stries dont nous venons de parler, sont assez semblables à celles qu'on aperçoit dans une eau qui coule dans un canal peu profond. Au lieu d'employer la flamme d'une chandelle pour produire le phénomène, on peut se servir de celle d'un quinquet dont on a fortement élevé la mèche, après avoir retiré le verre.

Le tremblotement de la flamme paraît dû à une volatilisation plus grande du suif, occasionnée par la longueur de la mèche. Cette volatilisation plus abondante amène un refroidissement

---

(1) Voyez le numéro précédent de la *Correspondance*, page 258.

qui porte obstacle à la combustion, de manière que certaines parties seulement sont enflammées, tandis que d'autres demeurent obscures. Il paraît que c'est à l'alternation de ces couches qu'on doit attribuer le phénomène qui nous occupe.

Sur la propriété du froid de réprimer la combustion (extrait d'un Mémoire de M. le docteur MAERTENS de Maestricht).

Plusieurs phénomènes remarquables sont dus à la propriété du froid de réprimer la combustion. L'expérience m'a prouvé que tous les corps combustibles, quels qu'ils soient, peuvent être privés de la faculté de brûler en leur mêlant une assez grande quantité de substances incombustibles. La théorie rend facilement raison de ce phénomène. Rappelons-nous que, lorsqu'un corps combustible a pris feu en un point, il faut, pour que la combustion puisse continuer, que la chaleur qu'elle dégage soit assez forte pour élever ses parties environnantes à la température nécessaire à ce que leur combustion avec l'oxigène puisse avoir lieu. Si donc on mêle à un corps combustible une matière qui ne soit pas susceptible de brûler, celle-ci se trouvant interposée entre les particules du combustible et les disséminant dans un plus grand espace, il est clair que si on met le feu à l'un des points du mélange, la combustion dans ce point ne saurait être intense; la chaleur développée sera par conséquent très-faible et se trouvera souvent insuffisante pour faire brûler les parties contiguës, la combustion s'arrêtera donc au point directement échauffé, et le mélange paraîtra incombustible. Voilà pourquoi il est si difficile d'incinérer et de brûler complétement le charbon animal, qui contient beaucoup de matière incombustible, telle que le phosphate de chaux; et il faut même en général, pour qu'il puisse être brûlé totalement, que chaque point de la masse soit échauffé *directement* au degré nécessaire pour la combustion; ce qui comme on sent aisément exige un feu intense et long-temps soutenu. La poudre à canon, qui est une des substances les plus inflammables que l'on connaisse, peut être rendue incombustible en lui mêlant en assez grande

quantité des substances terreuses non-susceptibles de brûler; j'ai obtenu cet effet en la mêlant avec le double environ de son poids de carbonate de chaux. Il est aisé de prouver que si ce mélange ne s'enflamme pas, c'est uniquement parce que, dans le point où on met le feu, il ne se développe pas assez de chaleur pour que la combustion puisse se propager dans toute la masse; car en chauffant le mélange dans une cuillère de fer au-dessus de charbons ardens, de manière à porter le tout à la température requise pour la combustion de la poudre, alors celle-ci prend feu et brûle complétement en laissant la craie pour résidu.

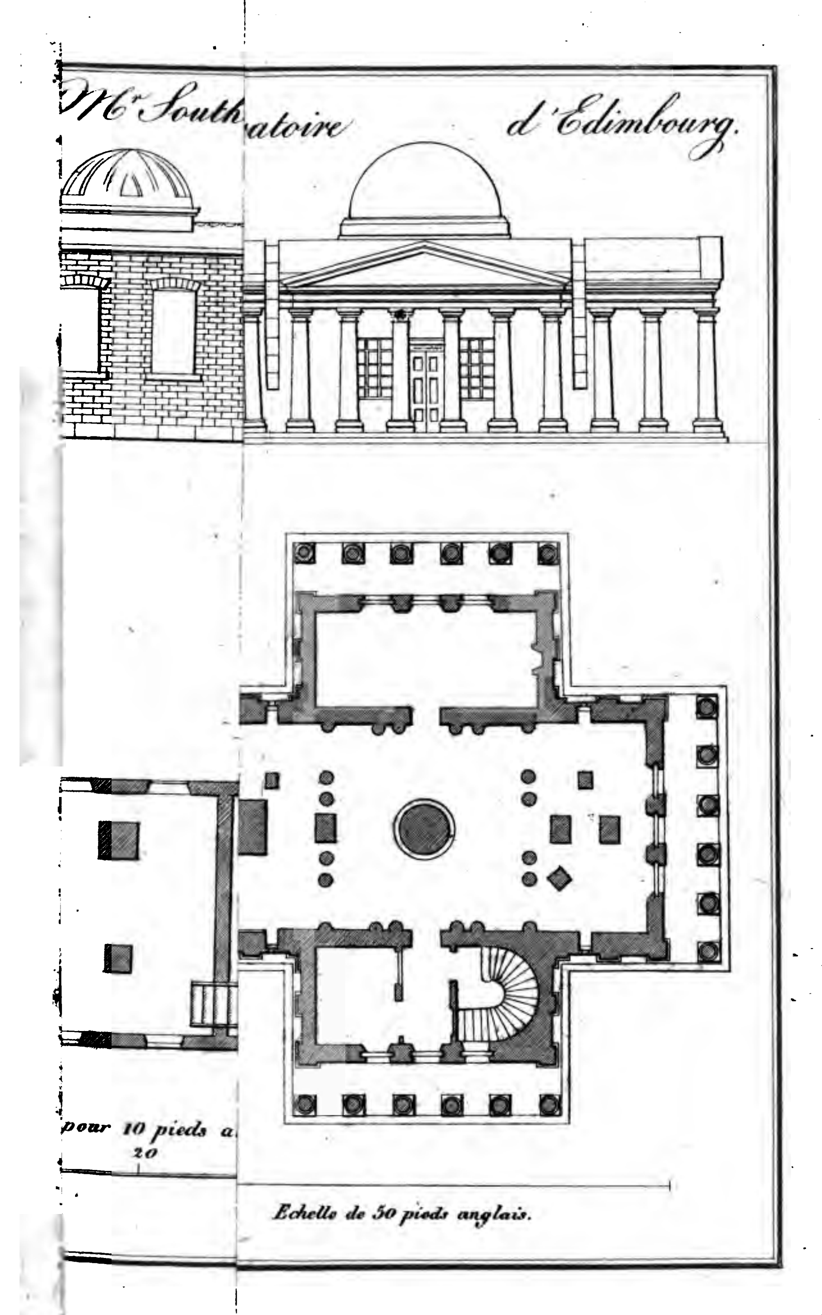
Mais parmi les matières combustibles, aucune ne nous présente la propriété que nous venons d'indiquer, d'une manière plus frappante que les mélanges gazeux explosifs. On sait que ces mélanges peuvent être privés de la faculté de faire explosion, en y ajoutant en assez grande quantité un gaz qui ne soit pas susceptible de contribuer à la combustion. La théorie rend parfaitement raison de ce phénomène. La partie du mélange à laquelle on met le feu dans l'intention de déterminer par la combustion l'inflammation de toute la masse (comme cela arrive dans un mélange explosif fait en proportions convenables) ne pourra brûler avec son intensité ordinaire, parce qu'elle contient peu de fluide susceptible de combustion et parce que ce fluide est refroidi par le gaz sur-ajouté au mélange; la chaleur développée dans le point enflammé sera donc très-faible, comme celle dégagée par un corps qui brûle dans un air vicié; elle ne pourra par conséquent suffire pour échauffer la masse ni même les parties environnantes à la température requise pour la combinaison, d'autant plus que le gaz sur-ajouté enlève une grande partie de la chaleur qui, dans un mélange explosif fait en proportions convenables, est employée tout entière à en élever la température; la combustion s'arrêtera donc au point que l'on a enflammé, et la petite quantité de chaleur et de lumière qui en provient se confondant avec celle du corps qui y a mis feu, le mélange devra se comporter comme s'il n'était aucunement inflammable. L'explication précédente suppose qu'il y ait réel-

lement combustion dans le point du mélange où le feu a été appliqué, et c'est ce qu'on ne saurait contester; car l'addition d'un gaz étranger au mélange explosif ne faisant que le raréfier ou en disséminer les particules dans un plus grand espace, et la température nécessaire à l'inflammation des mélanges explosifs étant indépendante de leur raréfaction, ainsi que *Davy* l'a prouvé (*Ann. de chimie*, tome 4), il s'ensuit que le gaz étranger ne peut entraver la combustion que de la même manière que le carbonate de chaux entrave celle de la poudre à canon à laquelle il est mêlé. Pourvu donc que l'on chauffe suffisamment le mélange gazeux dans un point quelconque, il faudra qu'il brûle dans cet endroit; mais la combustion ne se propagera pas à raison du peu de chaleur qu'elle développe, à moins que toute la masse ne soit directement échauffée au degré nécessaire pour l'inflammation. Des expériences directes prouvent encore ce que nous venons d'avancer. Si l'on fait passer des étincelles électriques à travers un mélange d'hydrogène et d'oxigène qui ne soit pas susceptible de faire explosion, on voit, quoiqu'il n'y ait pas de combustion apparente, que le mélange diminue peu à peu de volume, ce qui annonce une combustion partielle de la masse.

Lettre de M. Ch. Morren, candidat à l'université de Gand, *sur le lait qui a été soumis à l'ébullition.*

Je prends la liberté de rappeler à votre souvenir que, lors de mon séjour à Bruxelles, vous me parlâtes d'une observation sur le lait : observation que je m'engageai à répéter. Je m'en suis occupé depuis avec tout le soin dont je suis capable......

Lorsqu'on soumet à l'ébullition dans des vases ouverts une certaine quantité de lait (et l'on préférera celui qui n'est point écrêmé), on observe que bientôt à l'apparition de quelques bulles qui ne sont que des signes précurseurs de l'ébullition, il se forme, sur toute la surface du liquide, une pellicule d'épaisseur variable, étendue, unie, blanche, opaque, grasse au tou-



Mr South
atoire d'Edimbourg.
pour 10 pieds a
20
Echelle de 50 pieds anglais.

ıer. A peine formée, cette pellicule se meut par ondulations rges qui la font monter et descendre lentement à quelque dis-nce du bord du vase. Outre ce mouvement ondulatoire, on ı observe un autre bien plus curieux. C'est un tressaillement ıcal, un plissement partiel et subit; ce sont des crispations égulières et instantanées qui affectent tantôt telle partie de ı pellicule ou membrane, tantôt telle autre. Les mots me ıanquent pour exprimer la juste idée qu'on doit se faire du hénomène. Ces espèces de plis qui paraissent et dispa-aissent tour à tour, comme si elles étaient produites par des ndes, se régularisent d'une manière très-constante, et, le lus souvent, elles s'offrent sous la forme d'une feuille de ougère ou d'une barbe de plume, tout comme des cristalli-ations de sel. Il s'agit de savoir maintenant les raisons de ce phénomène.

Depuis long-temps, les chimistes ont remarqué que, par l'éva-poration, il se forme une pellicule sur la surface de ce liquide, et que c'est à cette pellicule qu'on doit le singulier phénomène du *soulèvement* du lait à la température de l'ébullition. Si on enlève la pellicule, le soulèvement cesse, parce que sa cause est détruite; mais pour peu qu'on laisse le lait sur le feu, une autre pellicule se forme et le soulèvement se répète. C'est donc un phénomène constant que la formation de la pellicule; c'est donc une suite nécessaire de l'augmentation de température qu'acquiert le lait, de sa tendance à l'ébullition. Or, les autres liquides tels que l'eau, ne donnent jamais naissance à une telle membrane. Je ne connais de liquides qui jouissent de cette propriété que ceux formés dans les corps vivans, et encore parmi ces derniers, ceux seulement que je nomme *organisés*, parce qu'ils contiennent des élémens organiques distincts : le sang, le chyle, etc., sont de ce nombre. Il faut donc chercher la cause du phénomène dans la composition même du liquide. Ici, il y a deux chemins à suivre. Il faut résoudre le problème, en s'ai-dant de quelques considérations ou chimiques ou anatomiques, parce qu'elles nous font découvrir la composition du lait; et ces considérations nous mèneront à un effet physique connu; et

de cet effet découlera, comme d'elle-même, la solution de la question.

Les chimistes nous apprennent que le lait est formé de crême, de matière caseuse et de petit-lait; les physiciens, que la crême est de ces parties, la plus légère en poids spécifique. Dès lors, on conçoit pourquoi, lorsque les circonstances le permettent, la crême surnage. Les physiologistes ont découvert que le lait est un liquide glandulaire, presqu'entièrement composé de *globules* visibles, distincts, *libres*, *solides* et *sphériques*.

Or, j'ai examiné au microscope le lait étendu en couche très-mince sur des plaques de verre, et avec un grossissement de 100 le diamètre, j'ai reconnu ces globules. J'ai dit qu'ils sont solides, parce que le lait desséché les montre encore dans le même état que lorsqu'ils nageaient dans le liquide. Or, s'ils étaient eux-mêmes liquides, ils disparaîtraient. Il est donc avéré que, par le dessèchement, les élémens organiques du lait ne se détruisent pas. Un des effets les plus remarquables du dessèchement, est la réunion des globules, ou leur agglutination mutuelle.

J'ai comparé entre eux, sous la même lentille du microscope, la crême et le petit-lait, et j'ai reconnu que les globules sont en très-grand nombre dans la crême par rapport à ceux du petit-lait. Un calcul approximatif me démontre que sur un centimètre carré, les globules sont au nombre de 900 dans la crême, tandis qu'il n'y en a que 100 sur une étendue égale de petit-lait. Le rapport est donc comme 1 : 9.

Lors donc qu'on mettra dans un vase ouvert une certaine quantité de lait et qu'on chauffera ce lait, il est clair que les premières couches de crême s'évaporeront; que les élémens solides se déposeront et, en vertu de leur légèreté, occuperont la couche supérieure du liquide. Or, nous avons vu que, quand le lait se dessèche, les globules restent et s'agglutinent. Le même phénomène a lieu avant et pendant l'ébullition, parce que le lait s'évapore et qu'il se dessèche. De l'agglomération des globules solides naît la membrane; et ce qui le prouve, c'est que, vue au microscope, cette membrane se présente sous la forme d'une

pellicule entièrement et uniquement composée de globules juxta-posés les uns contre les autres. J'ai voulu m'assurer de ce fait d'une manière plus certaine encore. J'ai mis dans un petit vase plat de porcelaine, haut seulement d'un et demi centimètre et de cinq centimètres de diamètre, une portion de lait avec trois portions d'eau que j'ai chauffées ensuite graduellement. Il s'est produit une membrane bien mince et très-transparente, parce que le nombre d'élémens organiques ou de globules était, dans ce liquide, bien moindre que dans le lait non mélangé. J'ai poussé l'ébullition jusqu'à parfaite exsiccation, et alors il m'est resté une pellicule boursoufflée, sèche, conservant tous les plis et les ondes en feuilles de fougère. Cette membrane très-cassante et nullement plicatile, est également composée de globules juxta-posés les uns contre les autres.

C'est cette membrane dont nous venons d'expliquer la formation sur le lait, qui donne lieu au soulèvement de cette liqueur, parce qu'elle s'oppose au libre dégagement du calorique qui émane des couches inférieures. L'expansion des gaz et des vapeurs élève la membrane, et *le lait se soulève*, mais pour cela, il faut une ébullition complète. Cependant, avant ce terme, on voit des bulles se dégager : elles crèvent en partie sous la membrane, et de là les ondulations diverses que cette dernière éprouve ; de là le balancement qu'elle montre. Joignez à ce premier effet, celui des courans qui se forment dans tous les liquides chauffés, et vous aurez la cause du plissement de la membrane, des interruptions de ce plissement, qui alors imiteront des crispations réitérées, parce que les courans varient en intensité et en direction. Enfin notez qu'à mesure que tous ces mouvemens s'exécutent, le lait s'évapore toujours, que sa pellicule augmente en épaisseur par le dépôt et l'agglutination des globules solides, qu'elle se colle aux parois du vase. De là ces ondes royonnantes qu'on observe facilement sur les petits vases plats dont j'ai parlé plus haut.

En résumé donc, on voit évidemment que ce phénomène résulte du concours de circonstances très-diverses ; la composition du lait formé d'élémens chimiques de pesanteur spécifique

différente, sa structure organique, les modifications que ses élémens anatomiques éprouvent par l'action des agens physiques, etc.

Je conseille à toutes les personnes qui voudraient répéter les expériences citées, de se servir de petits vases plats de porcelaine d'un demi-pouce de hauteur. Le lait de vache montre les effets les plus marqués; celui de femme donne naissance à de trop épaisses membranes; ce qui dépend peut-être de l'irrégularité de ses globules dont les uns égalent en diamètre trois des autres. Le lait de vache ne m'a présenté aucune différence de diamètre dans ses globules; il sont tous égaux.

Voici la série des phases successives sous lesquelles se montre le lait versé dans des vases que nous venons de citer, et à une chaleur qu'on augmente graduellement.

Une légère vapeur s'échappe du liquide, dès qu'il s'échauffe; des bulles se forment et se rendent presque toutes vers les parois du vase et y crèvent. Quelques instans après, la surface du lait paraît figée; c'est la première apparition de la membrane; par-ci par-là, on voit un foible tressaillement, mais bientôt une foule de gerçures se montrent sur toute la surface du lait qui se présente alors sous forme liquide dans ces gerçures, et sous forme solide dans la membrane. Des ondulations réitérées naissent sur toute son étendue, et peu à peu la pellicule se solidifie davantage: ses pièces séparées par les gerçures se soudent par l'évaporation du lait liquide qu'elles avaient mis à découvert. Bientôt les plissemens en feuilles de fougère surviennent de toutes parts, mais de préférence à la périphérie du vase, et tendent vers le centre; la membrane se soulève, le lait bout. Les vapeurs qu'il lance de ses couches percent la membrane qui descend de nouveau, mais jamais en entier, parce que ses bords collés tout autour du vase l'arrêtent. Si on continue d'augmenter la chaleur pendant un temps assez long, tout le liquide s'évapore et il ne reste que la pellicule avec tous ses plis, ses ondulations, etc. Elle se dessèche et on peut la conserver dans cet état aussi long-temps qu'on veut.

Dans ce phénomène, il est facile d'apercevoir que l'évaporation joue un assez grand rôle. Il est donc permis de se demander

si cette opération se manifeste également et toujours avec les mêmes circonstances dans les liquides, quel que soit leur état modifié par la chaleur. Sans doute, une portion d'eau soumise dans un vase ouvert à la libre action de l'air, va s'évaporer également par toute sa surface supérieure et en raison de l'étendue de cette surface; mais, lorsque l'eau est chauffée, en est-il de même? voilà ce que je voulais savoir. A cet effet, j'ai pris un vase hémisphérique, *noir* en dedans, et j'y ai versé de l'*eau de rivière* que j'ai chauffée jusqu'à ébullition. J'ai ensuite ôté le vase du feu et j'ai laissé refroidir lentement le liquide; je me suis placé de manière à voir par réflexion toute la surface : ce qui était d'autant plus aisé que le vase était noir, et voici ce que j'ai aperçu :

La vapeur assez blanche qui s'échappait de l'eau, ne s'en élançait pas uniformément, mais par bouffées ondoyantes : une foule de tournoiemens agitaient la vapeur même sur la surface du liquide, et fort souvent, elle restait comme attachée à cette surface, par lignes blanches diversement contournées. La singularité de ces mouvemens me suggéra l'idée qu'ils devaient avoir été imprimés à la vapeur, non par la force d'expulsion, ni par celle de son expansion propre, mais bien par quelque agitation du liquide. Afin de m'assurer du fait, je saupoudrai la surface de l'eau de poudre très-fine (impalpable) de *talc ordinaire* (matière fort légère qui surnage sur l'eau). Les petites pelotes de cette matière s'étendirent de suite sur le liquide, comme le ferait une goutte d'huile; ses nombreuses parcelles s'agitèrent bientôt, en tournant tantôt sur elles-mêmes, tantôt dans des cercles et mille autres courbes. Toute la surface du liquide paraissait en mouvement et agitée : phénomène qui montre assez la liaison des ondulations de la vapeur avec les agitations du liquide, et qui ne peut être attribué qu'à la différence de raréfaction du liquide dans ses couches diverses. Un fait qui me prouverait assez la vérité de cette assertion, c'est la déposition si singulièrement conformée de matière calcaire que tient en dissolution ou en suspension l'*eau de rivière*. A mesure que cette dernière se refroidit et s'évapore,

elle précipite une poudre calcaire au fond du vase; mais cette précipitation n'a point lieu uniformément sur tout le fond, et ne forme point une couche étendue homogène, comme on devrait s'y attendre. L'effet est tout autre. La substance calcaire précipitée est sous forme de lignes ondulées toutes disposées dans le même sens et assez régulièrement parallèles, sauf quelques embranchemens partiels qui naissent de quelques unes d'entre elles. Dans les vases hémisphériques, à fond petit et plat, tels que ceux dont je me sers, les lignes de calcaires sont plus larges vers le centre et s'étendent toutes parallélement au diamètre transversal.

La constante régularité de ces dépôts de matières précipitées, ferait croire que les couches de liquides alternativement chauffées et refroidies par leur transport successif du fond du vase vers la superficie, vont toutes parallélement les unes aux autres, à peu près comme des solides concentriques et enclavés les uns dans les autres; et peut-être ne serait-ce même qu'entre ces couches qui se froissent mutuellement dans leur mouvement contraire, que les matières tenues en suspension peuvent se précipiter et ainsi former des lignes parallèles, séparées entre elles par des intervalles égaux en largeur à l'épaisseur des couches de liquide; car, si une couche monte, tandis qu'une autre descend, une petite épaisseur de leur paroi, par lesquelles ces couches se touchent, restera sans mouvement, puisque ceux qui l'agitaient d'abord, se trouvent détruits par leur opposition; et si une telle portion d'eau est sans mouvement, je ne vois pas pourquoi, en vertu de l'évaporation qui continue toujours en diminuant la quantité de liquide, les matières solides ne peuvent et même ne doivent s'en précipiter, plutôt que des couches de liquide sans cesse agitées et transportées de haut en bas et de bas en haut. Je le répète, les dépôts de matières solides que les eaux tiennent en suspension, font croire que tout se passe ainsi. Pour bien observer ces effets, il est inutile de dire, je crois, que les vases doivent, pendant le refroidissement, être en repos parfait.

Il est donc possible que les couches de liquide ne conservent

plus, vers la superficie, la même régularité d'ordre, et qu'ainsi, en vertu de plusieurs causes concomitantes, telles que l'évaporation, la raréfaction de l'air pesant sur le liquide; raréfaction qui fait naître des courans divers, etc., la surface du liquide se trouve irrégulièrement agitée, comme le demontrent d'ailleurs les particules de talc jétées sur de l'eau très-chaude qui se refroidit lentement.

Or, ces irrégularités de mouvement à la surface des liquides chauffés, doivent sans doute modifier l'état d'une pellicule qui représente cette surface dans les liquides organisés, et lui communiquer une foule de mouvemens partiels qui viendront encore changer la constitution organique de la pellicule. Voilà donc, ce qui me porte à attribuer le tressaillement du lait chauffé au concours de toutes ces circonstances, produites, pour la plupart, par l'augmentation du calorique à laquelle le lait est soumis; et cela est si vrai que, lorsque ce liquide séjourne pendant 8 ou 10 jours dans des vases, il se forme bien sur sa surface une pellicule, mais alors cette pellicule ne présente aucun plissement semblable à celui que la chaleur y fait développer.

Gand, ce 8 mars 1828.

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

Sur les rapports entre le nombre des lettres qui composent l'alphabet dans les différentes langues.

Il est important pour les imprimeurs et les fondeurs, de connaître les proportions des lettres qui composent l'alphabet dans les différentes langues, afin de pouvoir former leurs assortimens. La connaissance de ces proportions peut également intéresser le philologue : d'une autre part, des gouvernemens soupçonneux y ont quelquefois eu recours pour déchiffrer les correspondances, dans lesquelles on substituait les unes aux autres

les lettres de l'alphabet. Comme ces proportions sont généralement très-peu connues, nous avons cru bien faire en consignant ici celles de trois alphabets.

ALPHABET.	HOLLANDAIS.	FRANÇAIS.	ITALIEN.
a	313	436	763
b	82	46	70
c	72	153	277
d	243	175	193
e	1000	1000	1000
f	30	61	67
g	175	41	200
h	152	35	90
i	218	361	807
j	5	31	»
k	125	»	»
l	168	298	410
m	112	127	217
n	563	404	610
o	300	312	730
p	45	138	230
q	»	71	22
r	337	294	517
s	180	488	340
t	277	367	430
u	117	398	100
v	105	78	243
w	113	»	»
x	»	16	»
y	118	12	10
z	70	1	50

La lettre *e* est celle qui se reproduit le plus fréquemment : les résultats que nous donnons, expriment combien de fois les autres lettres se reproduisent comparativement à celle-ci. Il est à remarquer du reste que ces proportions ne varient pas seulement en passant d'une langue à l'autre, mais même en passant dans une même langue d'une branche à l'autre ; de la poésie, par exemple, à la prose, ou de l'histoire aux sciences ; ou même d'un auteur à l'autre, quoiqu'alors les variations soient incomparablement moins sensibles. On déduit encore de ce qui précède les rapports suivans :

	HOLLANDAIS.	FRANÇAIS.	ITALIEN.
Voyelles . . .	2066	2519	3410
Consonnes . . .	2854	2824	3966

On voit que dans les trois alphabets, le nombre des consonnes l'emporte sur le nombre des voyelles, et pour 1000 lettres de la première espèce, on en compte 724 de la seconde en hollandais ; 892 en français ; 860 en italien. Ces rapports mériteraient d'être établis avec plus de précision et pourraient conduire à des résultats intéressans ; nous croyons du reste que nous pourrons indiquer sous peu des recherches beaucoup plus étendues et soumises à un examen plus rigoureux ; nous apprenons que M. *Hayez* s'occupe de ce travail.

STATISTIQUE.

Sur les institutions pour les secours dans le royaume des Pays-Bas, en 1826 (voyez le numéro précédent).

Nous avons déjà fait connaître dans la *Correspondance*, vol. III, page 246, quelle est la population des différentes provinces du Royaume ; nous pourrons donc nous dispenser de la reproduire

ici, et afin d'éviter la multiplicité des nombres, nous ne donnerons que des rapports qui sont plus facilement comparables :

	SECOURS A DOMICILE.		HOSPICES.	
Provinces	A	B	A′	B′
Brabant septentrional.	68,21	fl. 10,64	1,85	fl. 120,26
Brabant méridional .	229,86	3,33	9,77	110,67
Limbourg	126,27	3,75	5,77	55,55
Gueldre	67,16	12,62	4,78	136,87
Liége	176,39	2,44	3,73	124,30
Flandre orientale . .	96,74	5,50	4,38	95,19
Flandre occidentale .	146,94	4,70	4,10	110,18
Hainaut	188,30	3,26	6,37	78,08
Hollande septentrio^le^.	210,62	8,09	19,72	95,72
Hollande méridionale.	93,08	23,01	10,12	132,51
Zélande	62,41	27,71	5,32	127,21
Namur	136,39	1,86	7,08	61,67
Anvers	68,57	11,16	12,20	70,81
Utrecht	118,90	16,40	7,93	143,42
Frise	113,06	20,05	5,56	101,37
Overyssel	40,42	17,03	5,39	101,95
Groningue	47,96	25,24	4,48	82,34
Drenthe	36,04	15,40	2,55	62,49
Luxembourg	7,88	7,98	0,93	73,04
Le Royaume	123,05	7,31	6,79	99,37

A et A′ désignent les rapports entre les nombres des individus secourus et la population, calculée sur 1000 âmes.

B et B′ le montant proportionnel du total des dépenses par individu et par an.

Si l'on compare les nombres précédens à ceux que nous

vons donnés dans le volume précédent, on verra sans peine que es provinces populeuses et particulièrement celles qui passent our être les plus riches, sont celles qui comptent le plus d'inigens; ce sont aussi celles où la mortalité et la reproduction e font le plus remarquer. Nous ne confondrons pas les provinces riches avec celles où règne une aisance générale; cette listinction se fait sentir de la manière la plus pénible dans les résultats statistiques.

Les institutions pour les secours sont ou locales ou pour tout le Royaume; voici les nombres relatifs aux premières :

	ADMINISTRATIONS ET SOCIÉTÉS			
	POUR SECOURS à domicile.	POUR DISTRIBUTION d'alimens.	DE CHARITÉ maternelle.	HOSPICES.
Nombre des institutions . . .	5,129	36	4	724
Individus secourus	745,652	22,056	1448	41,172
Frais d'administration	656,483	»	»	932,407
Secours de toute espèce. . . .	4,792,256	82,424	13493	3,158,749
Revenus de propriétés. . . .	2,841,670	»	1628	2,869,917
Souscriptions et dons	»	59,843	7756	»
Collectes	1,297,280	»	550	368,559
Subsides des communes . . .	1,397,051	21,481	3600	810,895
Subsides des prov. ou de l'état.	10,146	»	»	86,735

Les institutions pour tout le Royaume se composent principalement de l'hospice militaire de Leyde et de l'hospice de Messines ouvert aux filles des militaires devenus invalides, ou morts au service de l'état. Le nombre des individus secourus a été de 2433; le total des dépenses de 1,134,232 fl.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Nieuwe Verhandelingen der 1ste *klasse van het Koninklijk Nederlandsche Institut*, in-4°, Amsterdam, chez *Muller* et *comp.*, 1828.

Cette seconde partie du 2e volume des *nouveaux Mémoires* de l'institut, renferme cinq écrits, dont trois ont pour objet des recherches sur différens points d'histoire naturelle (1); les deux autres concernent plus particulièrement les sciences mathématiques. L'un de ceux-ci est de M. *Van Utenhove*, et traite de la différence qui existe entre les miroirs sphériques et paraboliques, employés dans la construction des télescopes. L'auteur s'est occupé d'examiner quelle est la plus grande erreur que l'on commet en prenant, au lieu de ces derniers miroirs, les premiers; il décrit à cet effet un cercle dont le centre est, sur l'axe de la parabole, à une distance du sommet de cette courbe, double de celle du foyer. Ce cercle représente une section méridienne du miroir sphérique : en menant alors un rayon vecteur du centre, et en nommant δ le prolongement de ce rayon, compris entre la circonférence et la parabole, il calcule sa valeur en fonction de la distance focale et du diamètre du miroir : il applique ensuite la formule à différens exemples, et trouve que la quantité δ est dans sa plus grande

(1) Ces Mémoires sont de MM. *Thyssen*, *Sandifort* et *Vrolik*, secrétaire de la 1re classe.



aleur $\frac{1}{1778}$ d'une ligne dans le grand télescope d'*Herschel*; et le $\frac{1}{1001}$ dans le grand télescope fait pour l'observatoire de Leyde par les artistes frisons *Rienks* et *Roelofs*.

Un mémoire de M. *Beyerinck*, ingénieur en chef du waterstaat, a pour but de rechercher jusqu'à quel point les théories produites jusqu'à présent, peuvent servir à calculer le mouvement des eaux dans les canaux. L'auteur considère successivement les principes sur lesquels reposent les théories, l'application des théories aux observations et, enfin, leur utilité pour les besoins journaliers et pour la solution de diverses questions importantes sur nos rivières, particulièrement dans les provinces septentrionales. Ce mémoire, dont l'importance ne peut manquer d'être appréciée dans un pays où les travaux hydrauliques jouent un si grand rôle, est accompagné de deux cartes et de tableaux explicatifs.

De dilatatione liquidorum per calorem, dissertation inaugurale; par G. Simons. Utrecht, 1828.

M. *Simons* a discuté l'une des parties les plus intéressantes de la physique, dans la dissertation qu'il a écrite à l'occasion de sa promotion au grade de docteur en sciences; la dilatation des liquides a occupé les physiciens à différentes reprises; il n'était donc pas sans utilité de rapprocher les résultats auxquels ils étaient parvenus, et d'examiner les causes d'erreur qui avaient pu influer sur leurs expériences. Dans le premier chapitre, l'auteur expose les différentes méthodes qui ont été employées pour déterminer la dilatation des liquides; plusieurs sont basées sur l'exactitude des pesées, opérations qui présentent souvent de grandes difficultés dans la pratique. M. *Simons* donne ensuite les résultats numériques auxquels sont parvenus les physiciens, et il cite successivement les expériences d'*Achard*, de *Schmidt*, de *Thomson*, de *Dalton*, de *Gay Lussac*, de *Deluc*, etc.; il discute avec soin les erreurs auxquelles peuvent

avoir donné lieu les différentes méthodes qu'il trouve généralement insuffisantes. Un troisième chapitre est plus particulièrement destiné à l'examen de tout ce qui concerne la dilatation du mercure, de l'alcohol et de l'eau. Le fréquent emploi que l'on fait de ces trois liquides a porté l'auteur à les examiner avec plus de soin que les autres : les expériences de *Gay Lussac*, de *Dulong* et *Petit*, de *Blagden* et *Gilpin*, de *Tralles*, de *Charles*, et surtout de *Hällström*, sont successivement exposées. C'est aux expériences de ce dernier physicien que l'auteur donne la préférence, et il observe qu'il partage en cela l'opinion de M. *Moll* son ancien professeur, à qui il paie dans sa préface un juste tribut de reconnaissance, ainsi qu'à M. *Schröder* qui lui a aplani la carrière des mathématiques.

Parmi les *thèses* posées par l'auteur, nous en avons remarqué deux concernant la statistique : elles ne nous ont point paru à l'abri de toute attaque. La première concerne l'utilité des tableaux numériques : *non expedit totam statisticam tabellis contineri; sed tamen ideo hæ tabellæ numericæ non omni utilitate carent : hoc nomine conveniunt cum formulis mathematicis quibus fides potest haberi, si omnia, huc pertinentia, accurate sunt considerata.* Sans doute, les tableaux n'ont de prix qu'autant qu'ils sont exacts et qu'ils reproduisent fidèlement tous les élémens qui ont une dépendance mutuelle. A défaut de cette exactitude, il faut rejeter de la statistique non-seulement les tableaux, mais toute espèce d'observation, comme un bagage inutile qui encombre les chemins de la science. L'auteur avance qu'il n'est point avantageux que toute la statistique se compose de tableaux numériques; nous ne concevons guère que la chose puisse être faite autrement pour tout ce qui peut s'exprimer numériquement, et M. *Simons* lui-même en a donné la preuve dans sa dissertation; aimeroit-il mieux des aperçus vagues, des opinions? mais en définitive, des aperçus et des opinions reposent sur des faits observés, ou sont des préjugés nuisibles; s'ils reposent sur des faits, peut on mieux faire que d'en donner une énumération exacte? *Peser et compter* voilà les bases de la physique, on pourrait dire aussi de la statisti-

que ; le *raisonner* ne ferait que substituer les mots aux choses et créer un monde imaginaire au lieu d'un monde réel. L'auteur ajoute encore: *Non assentimur illis, qui homines, in re lauta versantes, minori mortalitati obnoxios esse putent quam egenos.* Prenons y garde ; ceci n'est pas une affaire d'opinion ; c'est ici que des tableaux numériques deviennent nécessaires, et à moins d'en opposer à ceux que M. *Villermé* a réunis pour Paris (ce que nous ne regardons pas du reste comme impossible), il faudra bien se rendre à la force des nombres. Nous citons M. *Villermé*, quoique nous sachions fort bien que plusieurs autres personnes ont cru reconnaître, comme lui, que l'*aisance* et non pas la *richesse* diminue la mortalité.

Du reste, ces observations ne portent que sur des *thèses* qui ne sont pas même toujours l'opinion d'un auteur, et elles ne doivent nuire en rien au jugement favorable que mérite, sous tous les rapports, la dissertation de M. *Simons*, dans laquelle on trouve une réunion de connaissances variées, une grande netteté d'idées et une critique judicieuse.

— M. *H. Strootman* nous écrit de Bréda, que dans l'énumération des journaux que nous avons donnée d'après M. *Somerhausen*, à la page 260 de ce vol., nous avons omis les suivans :

Amsterdam. *Verzamelingen van wiskundige voorstellen, door het Wiskundig Genootschap :* Een onvermoeide arbeid komt alles te boven. — *Magazijn voor wis- en natuurkundige wetenschappen.*

Purmerende. *Tijdschrift ter bevordering der mathematische wetenschappen.*

Breda. *Magazijn voor de Rekenkunst.*

Arhnem. *Wis- en krijgskundige oefeningen.*

QUESTIONS.

I. Trouver sur le plan d'un quadrilatère simple quelconque, le point dont les distances aux sommets de ce quadrilatère, multipliés par les deux côtés respectivement opposés, soient égales entre elles, de sorte que si ABCD désigne le quadrilatère et P le point cherché, on ait

$$PA \times BC \times CD = PB \times CD \times DA = PC \times DA \times AB = PD \times AB \times BC.$$

II. Trouver l'équation de la surface touchée constamment par un plan rectangulaire qui glisse le long d'un axe sur un plan perpendiculaire à cet axe, de manière que la perpendiculaire abaissée sur l'intersection des deux plans, au point où le plan mobile s'appuie sur l'axe, conserve une longueur constante et égale à D.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

Sur l'inscription des polygones réguliers dans le cercle. Extrait d'une lettre de M. Timmermans, *professeur à l'Athénée royal de Tournay.*

Dès la naissance de la géométrie, les anciens géomètres imaginèrent différentes méthodes pour inscrire des polygones réguliers au cercle ; mais le nombre des polygones qu'ils parvinrent à soumettre à des constructions géométriques est fort borné, et, cependant, il ne fut pas augmenté depuis Euclide jusqu'au commencement de ce siècle. A cette époque parut, en Allemagne, l'ouvrage de *Gauss*, intitulé *Disquisitiones Arithmeticæ*, où ce géomètre, ouvrant une nouvelle carrière à la géométrie, démontra la possibilité d'inscrire, outre les polygones déjà connus, tous ceux dont le nombre de côtés peut être représenté par $2^p + 1$, pourvu que ce nombre fût premier, p étant une puissance de 2.

Cette découverte, quoique fort importante, était loin de remplir l'espèce de lacune que laisse dans la géométrie l'inscription des polygones réguliers ; et le nombre de polygones non inscriptibles par des procédés géométriques, est encore infiniment plus grand que celui des polygones inscriptibles ; cependant, dans le dessin de fortification, dans le dessin linéaire, et, en général, dans presque tous les arts mécaniques, on éprouve à chaque pas le besoin de tracer de semblables figures ; c'est pourquoi, à défaut de constructions géométriques rigoureuses, on eut recours aux procédés empiriques pour les dessiner avec une exactitude suffisante. Le chevalier *Deville*, dans son *Traité*

de Fortification, donna, le premier, une semblable construction qui remplissait assez bien le but, et qui est encore en usage aujourd'hui. Sa méthode consiste à construire sur le diamètre du cercle un triangle équilatéral; à diviser ce diamètre en autant de parties égales que l'on veut avoir de côtés, et à joindre le sommet du triangle à l'extrémité de la seconde division; et l'arc compris entre l'extrémité du diamètre et cette droite prolongée forme une des divisions de la circonférence.

Cette construction, fort simple, avait cependant le défaut d'être d'autant plus inexacte que le nombre de côtés du polygone était plus grand, c'est-à-dire, qu'elle était d'autant moins utile que l'on en avait plus besoin pour suppléer au tâtonnement qui est toujours fort long pour les polygones d'un grand nombre de côtés. Cette observation n'échappa pas à une personne qu'une illustre naissance et de hautes fonctions semblaient devoir éloigner d'une étude aussi aride, et que je crois pouvoir nommer sans indiscrétion, S. A. R. le *duc Bernard de Saxe-Weimar*. Dans une lettre sur différens sujets qu'elle me fit l'honneur de m'écrire, elle me fit connaître une construction qui ne le cède en rien à celle du chevalier *Deville* du côté de la simplicité, et qui a sur elle l'avantage d'être d'autant plus exacte que le polygone doit avoir plus de côtés.

On divise le diamètre AB (*fig.* 1, *pl.* 8), en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés; sur ce diamètre, on élève un rayon OC perpendiculairement, et on le prolonge ainsi que OB, d'une longueur égale à une des divisions de AB; joignant les points E et D, la distance du point G à la troisième division H, à partir du point B, sera un côté du polygone régulier inscrit.

Pour un polygone de quatre ou cinq côtés, on ne fera usage ni de cette construction, ni de celle du chevalier *Deville*, parce que le tâtonnement y conduit plus promptement; mais, pour les polygones d'un plus grand nombre de côtés, cette construction présente dans la pratique les plus grands avantages : c'est cette considération qui m'a déterminé à la rendre publique.

Sur le rapport des côtés d'un triangle rectangle, par M. J. G. Ottema, docteur en lettres, à Utrecht.

Il est généralement connu que les nombres 3, 4, 5 et 5, 12, 13, expriment le rapport des côtés d'un triangle rectangle, de manière qu'on peut vérifier la propriété des carrés, sans être embarrassé par des fractions. Je ne sache pas qu'on ait encore tâché de découvrir la loi dont ces nombres dépendent, et dont on pourrait déduire d'autres rapports semblables. Il ne sera donc peut-être pas sans intérêt d'offrir au public le résultat de mes recherches (1).

L'observation que la différence entre l'hypothénuse et l'une des cathètes est la même dans chacun des deux cas proposés ci-dessus, m'a conduit à la question suivante :

Peut-on toujours construire un triangle rectangle, dont l'hypothénuse et l'une des cathètes diffèrent d'une unité, et dont l'autre cathète (la base) *est exprimée par un nombre quelconque donné?*

Pour résoudre cette question, je posai les données suivantes : la cathète connue $= m$, l'hypothénuse $= x$, et la cathète inconnue $= x - 1$. De cette manière, je dus avoir l'équation :

$$\text{I.} \qquad x^2 - m^2 = (x - 1)^2.$$

Dont la solution se trouve être

$$x = \frac{m^2 + 1}{2}, \qquad x - 1 = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

L'expression $\frac{m^2 - 1}{2}$ indique qu'il faut toujours donner m plus grand que l'unité. Et, afin que les deux fractions trouvées produisent un résultat entier, il est nécessaire que m soit un nombre impair.

(1) On trouve des recherches semblables dans plusieurs ouvrages élémentaires. Voyez le *Complément des élém. d'alg.* de *Lacroix*, p. 304. A. Q.

Suivant ce procédé, on obtient les rapports suivans :

(A)	3 .	4 .	5.
	5 .	12 .	13.
	7 .	24 .	25.
	9 .	40 .	41.
	11 .	60 .	61.
	13 .	84 .	85.
	15 .	112 .	113., etc.

En prenant pour m un nombre pair, on a les rapports :

(B)	2 .	1,5 .	2,5.
	4 .	7,5 .	8,5.
	6 .	17,5 .	18,5.
	8 .	31,5 .	32,5.
	10 .	49,5 .	50,5.
	12 .	71,5 .	72,5., etc.

Après avoir ainsi résolu la question précédente, j'ai tâché de la rendre plus générale, en posant la différence entre l'hypothénuse et la cathète inconnue $= n$.

Nommant cette fois-ci la cathète donnée $= \mathrm{M}$, ma première équation se changea en celle-ci :

$$\text{II.} \qquad x^2 - \mathrm{M}^2 = (x - n)^2,$$

qui me donna

$$x = \frac{\mathrm{M}^2 + n^2}{2n}, \qquad x - n = \frac{\mathrm{M}^2 - n^2}{2n}.$$

Afin que maintenant la division par $2n$ se puisse effectuer sans fraction, il est clair que,

1° M doit être un multiple de n.

2° M et n doivent être également pairs ou impairs.

Il est remarquable qu'en divisant les rapports que donnent ces dernières formules par n, on obtiendra un des rapports (A), si $\frac{M}{n}$ est impair, et un des rapports (B), si $\frac{M}{n}$ est pair.

Soit par exemple	M = 20	,	$n = 4$,	
On aura le rapport :	20	. 48	.	52,
Qui, divisé par 4, donne	5	. 12	.	13.
Prenant :	M = 21	,	$n = 3$,	
On trouve celui de	21	. 72	.	75.
Et en divisant par 3	7	. 24	.	25.
Quand on donne	M = 24	,	$n = 6$,	
On trouve les nombres	24	. 45	:	51.
En les divisant par 6, on a :	4	. 7,5	.	8,5.

La raison de cette dernière propriété est que M étant multiple de n, on a toujours $\frac{M}{n} = m$, ce qui fait changer la seconde équation en celle-ci :

$$\text{III.} \qquad x^2 - \overline{mn}^2 = (x - n)^2,$$

par laquelle on obtient le rapport :

$$mn \, . \, \frac{\overline{mn}^2 - n^2}{2n} \, . \, \frac{\overline{mn}^2 + n^2}{2n}.$$

En divisant le tout par n et en simplifiant les deux fractions, on trouve le rapport :

$$m \, . \, \frac{m^2 - 1}{2} \quad \frac{m^2 + 1}{2},$$

qui est exactement le même que celui de l'équation I.

Trouver sur le plan d'un quadrilatère simple quelconque, le point dont les distances aux sommets de ce quadrilatère, multipliées par les deux côtés respectivement opposés, soient égales entre elles. Question proposée à la page 348 de ce volume, et résolue par M. *H. Strootman*, de Bréda.

D'après l'énoncé on a (*fig.* 2) :

$$PA\times BC\times CD=PB\times CD\times DA=PC\times DA\times AB=PD\times AB\times BC.$$

d'où il suit

$$PA : PB=DA : BC$$
$$PD : PC=DA : BC$$
$$PA : PD=AB : CD$$
$$PB : PC=AB : CD.$$

donc aussi

$$PA : PB=PD : PC = DA : BC.$$

et

$$PA : PD=PB : PC = AB : CD.$$

De ces deux dernières proportions il suit que dans le cas donné, les triangles PAD et PBC, ainsi que les triangles PAB et PDC doivent être semblables, et que les angles CPB et DPA ainsi que les angles APB et DPC doivent être égaux. Ces derniers étant des angles égaux, opposés au sommet, PA et PD seront donc respectivement dans le prolongement de PC et PB et le point P se trouvera à l'intersection des deux diagonales.

Il suit de la similitude des triangles opposés au sommet que le cas donné n'aura lieu que dans le carré, le rectangle, le parallélogramme et le quadrilatère qui peut être inscrit dans un cercle.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Propriétés de l'intersection d'un cône de révolution et d'une sphère, le sommet du cône se trouvant sur la surface de la sphère; par M. le docteur REISS, de Francfort.

L'intersection d'un cône droit et d'une sphère, à la surface de laquelle est le sommet du cône, est en général une courbe à double courbure. Elle jouit de plusieurs propriétés élégantes qu'on déduit très-aisément au moyen d'une analise élémentaire, que nous commencerons par exposer.

Lorsque deux droites ont un rapport quelconque entre elles, de manière que tous les points de la première correspondent à certains points de la seconde, et que la première est supposée être dirigée de A vers B; je dirai que la seconde est prise dans le même sens quand elle est dirigée d'un point a correspondant à A vers un point b correspondant à B.

Soient OX, OY, OZ, trois axes rectangulaires; l une droite quelconque prise dans un certain sens; et soient α, β, γ, les angles que fait l avec les directions positives de OX, OY, OZ. Appelons δ l'angle que fait la projection de l sur le plan YOZ, avec la direction de OY. On trouve sans difficulté,

$$\cos.\beta=\sin.\alpha.\cos.\delta;\quad \cos.\gamma=\sin.\alpha.\sin.\delta\ldots\ (1).$$

Supposons maintenant qu'une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de l sur OX reste invariablement attachée à ces deux droites, et que l vienne à tourner autour de OX comme autour d'un axe. L'angle formé par les positions de la perpendiculaire avant et après la rotation en mesurera la quantité.

Mais il est évident que cet angle est le même que celui que font entre elles les projections de l sur le plan YOZ avant et après la rotation. En désignant donc par ρ l'angle de rotation, par δ' l'angle formé par la seconde projection de l sur YOZ et la direction positive de OY, nous trouverons $\delta'=\delta+\rho$.

Je dirai qu'avant la rotation, l est dans sa première position, qu'après des rotations de 90°, de 180°, de 270°, l se trouve successivement dans sa seconde, dans sa troisième, dans sa quatrième position. L'angle δ deviendra dans ces quatre positions successivement δ, $\delta+90°$, $\delta+180°$, $\delta+270°$. L'angle α ne sera pas altéré par la rotation, et nous trouverons les angles que fait l dans ses quatre positions avec les directions positives de OY et OZ en mettant les valeurs convenables de δ dans les équations (I).

Soit à présent l' une autre droite quelconque faisant les angles $a, b, c,$ avec les directions positives de OX, OY, OZ. Soient ensuite φ^{I}, φ^{II}, φ^{III}, φ^{IV}, les angles que fait l' avec l dans ses quatre positions. Un théorème très-connu nous fournit les équations suivantes :

$$\cos.\varphi^{\text{I}}=\cos.a.\cos.\alpha+\cos.b.\sin.\alpha.\cos.\delta+\cos.c.\sin.\alpha.\sin.\delta;$$

$$\cos.\varphi^{\text{II}}=\cos.a.\cos.\alpha-\cos.b.\sin.\alpha.\sin.\delta+\cos.c.\sin.\alpha.\cos.\delta;$$

$$\cos.\varphi^{\text{III}}=\cos.a.\cos.\alpha-\cos.b.\sin.\alpha.\cos.\delta-\cos.c.\sin.\alpha.\sin.\delta; \quad \ldots\text{(II)}.$$

$$\cos.\varphi^{\text{IV}}=\cos.a.\cos.\alpha+\cos.b.\sin.\alpha.\sin.\delta-\cos.c.\sin.\alpha.\cos.\delta.$$

Il en résulte

$$\cos.\varphi^{\text{I}}+\cos.\varphi^{\text{III}}=\cos.\varphi^{\text{II}}+\cos.\varphi^{\text{IV}}=2\cos.a.\cos.\alpha\ldots.\text{(III)};$$

puis, en observant que

$$\cos.^2 b+\cos.^2 c=\sin.^2 a,$$

$$\cos.^2\varphi^{\text{I}}+\cos.^2\varphi^{\text{II}}+\cos.^2\varphi^{\text{III}}+\cos.^2\varphi^{\text{IV}}=4\cos.^2a.\cos.^2\alpha+2\sin.^2a.\sin.^2\alpha\ \ldots\text{(IV)}.$$

De (III) nous tirons

$$(\cos.\varphi^{\text{I}}+\cos.\varphi^{\text{III}})^2+(\cos.\varphi^{\text{II}}+\cos.\varphi^{\text{IV}})^2=8\cos.^2 a\cos.^2\alpha\ ;$$

en combinant cette équation avec (IV), nous trouverons

$$\cos.\varphi^{\text{I}}.\cos.\varphi^{\text{III}}+\cos.\varphi^{\text{II}}.\cos.\varphi^{\text{IV}}=2\cos.^2 a.\cos.^2\alpha-\sin.^2 a.\sin.^2\alpha\ldots(\text{V}).$$

En supposant que la droite l passe par le point O, elle engendrera, en tournant autour de OX la surface d'un cône de révolution, dont O est le sommet, OX l'axe. Un plan A, mené arbitrairement par OX, coupera le cône suivant deux côtés. En adoptant l'un d'eux pour l dans sa première position, l'autre sera nécessairement l dans sa troisième position, et un plan mené par OX perpendiculairement à A, coupera le cône suivant deux côtés qui représenteront l dans sa seconde et dans sa quatrième position.

Supposons de plus que la droite c' passe aussi par le point O. Abaissons d'un de ses points L, des perpendiculaires sur tous les côtés du cône (ou sur ses prolongemens). La droite l', les côtés du cône et les perpendiculaires formeront des triangles rectangles qui ont tous la même base OL. Il faut donc que les points dans lesquels ces côtés du cône sont coupés par les perpendiculaires, soient tous situés dans la surface d'une sphère dont OL est un diamètre, ce qui revient à dire que *ces points sont situés dans l'intersection du cône et d'une sphère sur la surface de laquelle est le sommet du premier.*

Pour simplifier l'énoncé des théorèmes suivans, je supposerai que les perpendiculaires ne coupent aucun des côtés du cône dans son prolongement, c'est-à-dire que la partie du cône entre le sommet et la courbe d'intersection, soit située tout entière dans la sphère.

Je nommerai *rayons vecteurs* les côtés du cône situés entre le sommet et la courbe d'intersection.

Le plan A, mené arbitrairement par l'axe du cône, coupera

la courbe d'intersection en deux points ; la ligne qui joint ces derniers sera nommée *diamètre*.

Les diamètres situés dans deux plans perpendiculaires entre eux seront compris sous le nom de *diamètres à plans perpendiculaires*.

Le plan passant par OX et OL, ou bien le plan passant par l'axe du cône et le centre de la sphère, sera désigné par *plan principal*, et le diamètre situé dans ce plan par *diamètre principal*.

Enfin, je nommerai α l'angle que fait OX, l'axe du cône, avec les côtés ; je supposerai, comme auparavant, deux axes OY et OZ perpendiculaires entre eux et à OX ; je nommerai a, b, c, les angles que fait OL avec OX, OY, OZ, et δ l'inclinaison d'un plan A passant par OX sur le plan XOY ; je représenterai par φ^{I}, φ^{III}, les angles que fait OL avec les rayons vecteurs situés dans le plan A, par φ^{II}, φ^{IV}, les angles que fait OL avec les rayons vecteurs situés dans un plan mené par OX perpendiculairement à A. On voit aisément que tous les signes α, δ, a,.., φ^{I}..., ont ici la même signification que dans l'analise précédente. Nous trouverons donc OL. cos. φ^{I} et OL. cos. φ^{III} pour les valeurs des rayons vecteurs situés dans le plan A, ou bien pour les valeurs des rayons verteurs menés aux extrémités du diamètre situé dans le plan A ; puis, OL. cos. φ^{II} et OL. cos. φ^{IV} pour les valeurs des rayons vecteurs menés aux extrémités du diamètre situé dans un plan perpendiculaire à A.

La somme des deux rayons vecteurs situés dans le plan A est donc

$$=\mathrm{OL}\,(\cos.\varphi^{\mathrm{I}}+\cos.\varphi^{\mathrm{III}})=2\mathrm{OL}.\cos.a.\cos.\alpha. \quad (v.\ \mathrm{III}).$$

Cette équation nous apprend que la somme de deux rayons vecteurs situés dans un plan passant par l'axe du cône, est indépendante de l'angle δ qui exprime l'inclinaison de ce plan sur le plan XOY. Nous tirons de là le théorème suivant :

La somme de deux rayons vecteurs menés aux extrémités d'un même diamètre est constante.

Or, M. *Quetelet* a démontré que, la section d'un cône de révolution étant une ellipse, la somme de deux rayons vecteurs menés du sommet du cône aux extrémités d'un même diamètre de l'ellipse, est constante et égale au double du rayon vecteur mené à l'extrémité du petit axe (*V. t. II, p.* 79, *t. III, p.* 275 (1), et les *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*). On s'apercevra de l'analogie qui existe entre ce théorème et celui que je viens d'avancer.

En considérant maintenant un diamètre quelconque de notre courbe d'intersection comme le grand axe d'une ellipse, le point qui le coupe en deux parties égales, sera le centre de cette ellipse, le petit axe de laquelle se trouvera dans le plan mené par ce point perpendiculairement à l'axe du cône. Or, les portions des côtés du cône situées entre le sommet et ce plan seront toutes égales entre elles et aux rayons vecteurs menés aux extrémités du petit axe. Elles seront donc égales à la moitié de la somme des rayons vecteurs menés aux extrémités du grand axe, c'est-à-dire à la moitié de la somme des rayons vecteurs menés aux extrémités du diamètre de la courbe d'intersection. Cette dernière somme étant la même pour tous les diamètres, il est évident qu'en menant par le milieu de tous les diamètres de notre courbe des plans perpendiculaires à l'axe du cône, les portions des côtés du cône situées entre le sommet et ces plans seront toutes égales entre elles. Il s'ensuit de là immédiatement que tous ces plans doivent coïncider; ce qui donne naissance au théorème suivant :

En menant par le milieu d'un diamètre quelconque un plan perpendiculaire à l'axe du cône, ce plan coupera en deux parties égales tous les diamètres de la courbe d'intersection.

Désignons ce plan par *plan des centres*, nommons C le point dans lequel il coupe l'axe du cône, CD la droite suivant laquelle il coupe le plan XOY. A et δ ayant la même signification que jusqu'à présent, et μ étant le point dans lequel le diamètre situé

(1) Voyez aussi le IV[e] vol. de la *Correspondance Mathématique*.

dans le plan A coupe le plan des centres, on trouvera l'angle $\mu CD = \delta$.

Considérons à présent le diamètre comme la base et les rayons vecteurs menés à ses extrémités comme les côtés d'un triangle. La droite μC sera alors la perpendiculaire abaissée du milieu de la base sur la ligne qui partage en deux parties égales l'angle opposé à la base. Nous trouverons donc $\mu C = \frac{1}{2} \times$ la différence des rayons vecteurs $\times$ sin. α

$$= \frac{1}{2} OL.\sin.\alpha(\cos.\varphi^{\prime} - \cos.\varphi^{\prime\prime\prime}) = OL(\cos.b.\cos.\delta + \cos.c.\sin.\delta)\sin.^2\alpha.$$

Supposons, pour simplifier, que le centre de la sphère soit situé dans le plan XOY, c'est-à-dire que ce plan soit le plan principal; nous trouverons

$$\cos.\alpha = \cos.a; \quad \cos.b = \sin.a; \quad \cos.c = o,$$

et

$$\mu C = OL.\ \sin.a.\ \sin.^2\alpha.\ \cos.\delta.$$

Si l'on fait $\delta = o$, la valeur de μC sera $= OL.\ \sin.a.\ \sin.^2\alpha$ et conviendra à la droite qui joint le point C au milieu du diamètre principal. En nommant ce point, M, il viendra

$$\mu C = MC.\ \cos.\delta$$

Mais en observant que le point M doit se trouver sur la droite CD, l'angle $MC\mu$ sera $= \delta$. On sera donc autorisé à dire que l'angle $M\mu C$ est $= 90^{o}$, et à énoncer les théorèmes suivans :

Lorsqu'on abaisse du milieu du diamètre principal une perpendiculaire sur l'axe du cône, et qu'on décrit autour de cette perpendiculaire comme diamètre un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe, tous les diamètres de la courbe d'intersection viendront passer par la périphérie du cercle et y seront coupés en deux parties égales.

Le diamètre situé dans le plan perpendiculaire au plan principal, sera situé de même dans le plan des centres et touchera le cercle du théorème précédent.

Les rayons vecteurs situés dans le plan A, étant OL. cos. φ^{I} et OL. cos. φ^{III}, et les rayons vecteurs situés dans le plan mené par OX perpendiculairement à A étant OL. cos. φ^{II} et OL. cos. φ^{IV}, nous trouverons :

1° La somme des carrés de ces quatre rayons vecteurs

$$= OL^2\,(4 \cos.^2 a.\, \cos.^2 \alpha + 2 \sin.^2 a.\, \sin.^2 \alpha) \ldots (v.\ \text{IV});$$

2° Le triangle formé par les rayons vecteurs et le diamètre situés dans le plan A

$$= \frac{1}{2}\, OL^2 \cos.\, \varphi^{\text{I}}.\, \cos.\, \varphi^{\text{III}}.\, \sin.\, 2\alpha$$

et le triangle formé par les rayons vecteurs et le diamètre situés dans le plan perpendiculaire à A

$$= \frac{1}{2}\, OL^2.\, \cos.\, \varphi^{\text{II}}.\, \cos.\, \varphi^{\text{IV}}.\, \sin.\, 2\alpha$$

La somme de ces deux triangles est donc

$$= \frac{1}{2}\, OL^2.\, \sin.\, 2\alpha\, (2 \cos.^2 a.\, \cos.^2 \alpha - \sin.^2 a\, \sin.^2 \alpha) \ldots (v.\ \text{V});$$

3° Le carré du diamètre situé dans le plan A

$$= OL^2\,(\cos.^2 \varphi^{\text{I}} + \cos.^2 \varphi^{\text{III}} - 2 \cos.\, \varphi^{\text{I}}.\, \cos.\, \varphi^{\text{III}}.\, \cos.\, 2\alpha)$$

et le carré du diamètre situé dans le plan perpendiculaire à A

$$= OL^2\,(\cos.^2 \varphi^{\text{II}} + \cos.^2 \varphi^{\text{IV}} - 2 \cos.\, \varphi^{\text{II}}.\, \cos.\, \varphi^{\text{IV}}.\, \cos\, 2\alpha).$$

La somme de ces deux carrés sera donc

$$= OL^2 . \sin.^2 2\alpha (1 + \cos.^2 a).$$

Les expressions trouvées dans 1°, 2° et 3°, sont indépendantes de l'angle δ; ce qui donne lieu aux théorèmes suivans :

La somme des carrés des rayons vecteurs menés aux extrémités de deux diamètres à plans perpendiculaires est constante.

La somme des triangles que forment deux diamètres à plans perpendiculaires avec les rayons vecteurs menés à leurs extrémités est constante.

La somme des carrés de deux diamètres à plans perpendiculaires est constante.

En coupant un cône de révolution par un plan, de manière que la section soit une ellipse, je dis :

Que la somme des carrés des rayons vecteurs menés du sommet aux extrémités de deux diamètres conjugués est constante;

Que la somme des triangles formés par deux diamètres conjugues et les rayons vecteurs menés du sommet à leurs extrémités est constante;

Que la somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante.

Il est intéressant de remarquer l'analogie qui existe entre les trois derniers théorèmes relatifs à l'intersection du cône et de la sphère et ces propriétés de l'intersection plane du cône. La dernière de celles-ci est connue depuis long-temps. Les deux autres pourraient être démontrées très-facilement.

J'aurais pu simplifier un peu l'analise sur laquelle est fondée la démonstration des théorèmes contenus dans cet article; mais j'ai préféré de donner les équations (2) dans leur plus grande généralité. Ces équations ne supposent pas que les droites l et l' passent par le point O, elles se rapportent au contraire à toutes les droites parallèles à l et l'. On voit par là qu'en les combinant avec les équations (3), (4) et (5), elles pourraient donner lieu à beaucoup d'autres théorèmes intéressans.

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

Note *sur une propriété générale des coniques dont un cas particulier relatif à la parabole, a été démontré dans la* Correspondance, tom. IV, p. 155; communiquée par M. Chasles, ancien élève de l'école Polytechnique.

(1) Il a été démontré que, quand on inscrit une parabole dans un quadrilatère, toute tangente à la courbe divise deux côtés opposés du quadrilatère en segmens proportionnels.

Cette proposition est un cas particulier d'une propriété générale des coniques qu'on peut déduire immédiatement d'un théorème analogue, relatif à l'hyperboloïde à une nappe, que j'ai donné dans la *Correspondance sur l'école Polytechnique* (t. II, p. 446), et dont voici l'énoncé :

Si, ayant un quadrilatère gauche $A'B'C'D'$ (fig. 3), *on fait mouvoir sur les deux côtés opposés $A'B'$, $C'D'$ une droite qui les rencontre en deux points M', N', liés entre eux par la relation* $\frac{A'M'}{B'M'} = a.\frac{D'N'}{C'N'}$, *et sur les deux autres côtés $A'D'$, $B'C'$ une droite qui les rencontre en deux points P', Q', liés entre eux par la relation* $\frac{AP}{DP} = a\frac{BQ}{CQ}$, a *étant une constante, toutes les droites $M'N'$ s'appuieront sur toutes les droites $P'Q'$.*

(2) Ce théorème prouve la double génération de l'hyperboloïde à une nappe par une droite (voyez les *Élémens de Géométrie à trois dimensions de M.* Hachette, pag. 21). Pour en

déduire celui qui lui correspond dans la géométrie plane, o remarque que les projections sur un plan ; des génératrices d l'hyperboloïde sont toutes tangentes à une même conique, parc que les plans projetans forment un cylindre du deuxième degr circonscrit à l'hyperboloïde.

Ainsi, en désignant par les mêmes lettres non accentuées les pro jections des points A′, B′, C′, D′, M′, etc., les deux droites MN PQ (*fig.* 4) seront toujours tangentes dans leur mouvemen à une même conique ; mais les segmens tels que AM, BM com pris sur un même côté du quadrilatère plan, seront entre eu comme les segmens A′M′, B′M′ du quadrilatère gauche, on aur donc

$$\frac{AM}{DM}=a\frac{DN}{CN}, \quad \frac{AP}{CP}=a\frac{BQ}{CQ}.$$

(3) Réciproquement *toutes les tangentes d une conique peu vent être considérées comme les projections des génératrices d'u hyperboloïde.* Car il suffit de regarder quatre de ces tangente comme les projections des côtés d'un quadrilatère gauche, une cinquième tangente comme la projection d'une droite s'ap puyant sur deux côtés opposés de ce quadrilatère ; ces cin droites dans l'espace appartiendront à un hyperboloïde do les projections des génératrices seront toutes tangentes à un même conique ; mais cinq de ces projections sont tangentes à la conique proposée, toutes les autres sont donc tangentes aussi à cette conique, puisqu'il ne peut y avoir qu'une conique tangente à cinq droites données.

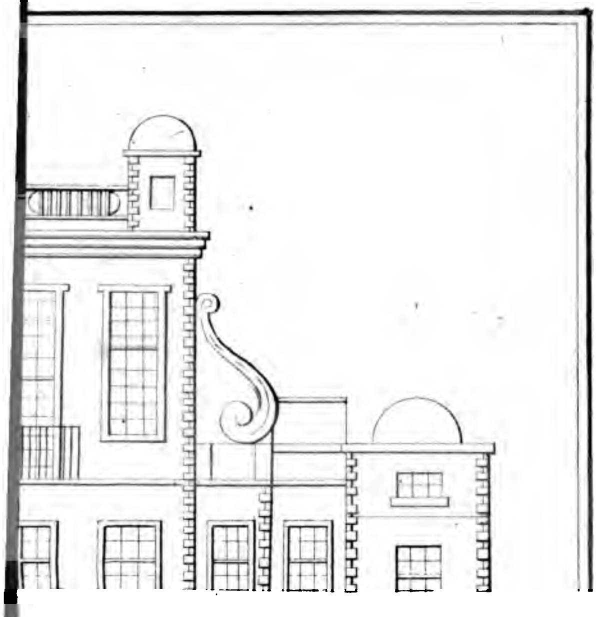
Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

(4) *Quand une droite se meut dans le plan d'un quadrilatère de manière que le rapport des segmens qu'elle fait sur un côté, et le rapport des segmens qu'elle fait sur le côté opposé, soient entre eux dans une raison constante, cette droite enveloppe dans son mouvement une conique tangente aux quatre côtés du quadrilatère.*

Et réciproquement :

Si, après avoir circonscrit un quadrilatère à une conique, on

e Greenwich.



mène une cinquième tangente, le rapport des segmens qu'elle fera sur un côté du quadrilatère, sera au rapport des segmens qu'elle fera sur le côté opposé, dans une raison constante, quelle que soit cette cinquième tangente;

Et cette raison sera la même pour les rapports des segmens faits pareillement sur les deux autres côtés du quadrilatère par chaque tangente.

Ainsi ABCD (*fig.* 4) étant un quadrilatère circonscrit à une conique, et deux tangentes quelconques de cette courbe rencontrant, la première les deux côtés AB, CD en M, N, et la seconde les deux autres côtés AD, BC en P, Q, on aura

$$(1)\ldots\ \frac{AM}{BM}=a\frac{DN}{CN},\quad (2)\ldots\ \frac{AP}{DP}=a\frac{BQ}{CQ},$$

a étant une constante, quelles que soient les deux tangentes MN, PQ.

(5) Ces deux équations donnent, entre les huit segmens faits par ces deux tangentes sur les quatre côtés du quadrilatère, la relation

$$AM.\ BQ.\ CN.\ DP. = AP.\ DN.\ CQ.\ BM.$$

qui exprime le théorème suivant, démontré déjà, et d'une manière différente, par M. *Poncelet* (voyez *Traité des propriétés projectives*, p. 115).

Une conique étant inscrite dans un quadrilatère, si on lui mène deux tangentes quelconques et qu'on prenne les points où la première rencontrera deux côtés opposés du quadrilatère et les points où la deuxième rencontrera les deux autres côtes, ces quatre points diviseront ces côtés en huit segmens, tels que le produit de quatre de ces segmens qui n'auront pas d'extrémité commune, sera égal au produit des quatre autres.

(6) Cette relation, entre les huit segmens, prouve (d'après la théorie des transversales, voyez *Correspondance de l'école Polytechnique*, t. III, pag. 6) que les doites MP, NQ se rencontrent sur la diagonale BD; ce qui résulte aussi de ce que

les deux droites M'N', P'Q' du quadrilatère gauche étant dans un même plan, les droites M'P', N'Q', se rencontrent sur la diagonale B'D'. Ainsi les trois droites BD, MP, NQ, passent par un même point. C'est *la propriété de l'hexagone circonscrit à une conique*. (Due à M. *Brianchon*, voyez le 13[e] cahier des *Journaux de l'école Polytechnique*, pag. 301.)

On peut suivre une autre marche, et partir de cette propriété connue de l'hexagone pour démontrer le théorème (5), ainsi que l'a fait M. *Poncelet*, de sorte que le théorème (5) et la propriété connue de l'hexagone circonscrit à une conique sont identiques.

(7) La propriété du quadrilatère gauche dont nous nous sommes servis est d'une démonstration si facile, et conduit si naturellement aux résultats précédens, qu'elle peut faire pardonner d'avoir eu recours à des considérations de géométrie à trois dimensions pour démontrer des théorèmes de géométrie plane. Au surplus cette manière de considérer une conique comme l'enveloppe des projections des génératrices d'un hyperboloïde peut être employée avec avantage dans d'autres questions.

Par exemple, on voit sur-le-champ que le centre d'une conique inscrite dans un quadrilatère est sur la droite qui joint les milieux des deux diagonales.

Car tous les plans projetans enveloppent, comme nous avons dit (2), un cylindre circonscrit à l'hyperboloïde, la conique a son centre sur l'axe de ce cylindre, et cet axe passe par le centre de l'hyperboloïde, de sorte que le centre de la conique est précisément la projection du centre de l'hyperboloïde.

Mais les plans des angles A', C' du quadrilatère gauche sont tangens à l'hyperboloïde en A' et C', et se coupent suivant la diagonale B'D'; donc le centre de la surface se trouve sur le plan mené par cette diagonale et le milieu de la seconde diagonale A'C' qui joint les deux points de contact. Par une raison semblable, ce centre se trouve aussi sur le plan mené par cette diagonale A'C' et le milieu de la première B'D'; donc :

(8) *Tous les hyperboloïdes qui ont pour génératrices commu-*

nes les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, ont leurs centres sur la droite qui joint les milieux des deux diagonales du quadrilatère.

(9) Il suit de ce théorème, d'après ce que nous venons de dire, que :

Toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère ont leurs centres sur la droite qui joint les milieux des deux diagonales (théorème dû à *Newton*).

D'après la théorie des polaires, ce théorème donne le suivant :

Les polaires d'un point par rapport à des coniques circonscrites à un même quadrilatère, passent toutes par un même point.

Et ce théorème, par une nouvelle transformation polaire, donne celui-ci :

Les pôles d'une droite par rapport à des coniques inscrites dans un quadrilatère, sont tous sur une même droite.

Ce théorème aurait pu se déduire directement de celui de *Newton*, au moyen des principes de la perspective.

Nous ne démontrons ces théorèmes, qui sont bien connus, que parce que l'occasion s'en est présentée naturellement.

(10) Il est clair que les transformations polaires conduisent pareillement du théorème (8) aux deux suivans :

Quand plusieurs hyperboloïdes à une nappe ont pour génératrices communes les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, les plans polaires d'un point par rapport à ces hyperboloïdes passent tous par une même droite;

Et les pôles d'un plan, pris par rapport aux mêmes hyperboloïdes, sont tous sur une même droite.

(11) Reprenons les équations du théorème (4) qui est l'objet principal de cet article.

Les deux points M, N, peuvent être tous les deux en même temps sur les côtés mêmes AB, CD, ou sur leurs prolongemens; ou bien peuvent être, l'un sur un côté, et l'autre sur le prolongement de l'autre côté.

Dans le premier cas si l'on a $a = 1$, la conique enveloppée par la droite mobile MN sera une parabole, parce qu'elle aura

une tangente à l'infini; car si le point M est à l'infini, les deux segmens AM, BM seront égaux, comme infiniment grands ne différant que d'une quantité finie; l'équation $\frac{AM}{BM}=\frac{DN}{CN}$ donne donc DN = CN, ce qui ne peut avoir lieu que si le point N est aussi à l'infini. Ainsi la tangente MN sera à l'infini, et la conique sera une parabole.

De sorte que :

Toute tangente à la parabole inscrite dans un quadrilatère divise deux côtés opposés en segmens proportionnels.

La manière dont nous sommes parvenus à cette proposition fait voir que sa réciproque n'est pas vraie; et que quand une tangente à une conique inscrite dans un quadrilatère divise deux côtés opposés en segmens proportionnels, cette conique n'est une parabole que dans le cas où la tangente rencontre les deux côtés ou sur ces deux côtés en même temps, ou sur leurs prolongemens; et que dans le cas où la tangente rencontre un côté entre les deux sommets que joint ce côté, et rencontre le prolongement du côté opposé, la conique ne peut pas être une parabole

(12) La propriété de l'hexagone circonscrit sert, comme on sait, à construire les tangentes d'une conique assujettie à toucher cinq droites

Ainsi étant données les cinq tangentes AB, BC, CD, DA et MN, d'un conique (*fig.* 4), on en déterminera une autre PQ en tirant par les points M, N deux droites se rencontrant en un point de la diagonale BD, les points P, Q, où elles rencontreront les côtés AD, BC détermineront une tangente PQ.

Mais dans la construction d'une épure en grand, sur le terrain, il est souvent difficile d'aller chercher le point de concours de deux droites, et on préfère alors déterminer par des calculs numériques des points plus rapprochés, et obtenus ainsi plus rigoureusement. Alors on pourra se servir pour déterminer les points P, Q, de chaque tangente PQ de l'équation (2) (art. 4), dans laquelle a sera un nombre donné par l'équation (1) où tout est connu, puisque nous supposons donnée la tangente MN.

On prendra arbitrairement le point QP sur le côté AD, et l'équation (2) fera connaître par un calcul d'arithmétique facile, l'expression numérique du segment BQ.

(13) Examinons quelques cas particuliers du théorème (4). Si les deux côtés AB, AD sont en ligne droite, la conique leur sera tangente au point A, et l'on aura ce théorème :

Quand une conique touche les trois côtés d'un triangle BCD (fig. 3), dont un BD en un point A, si on lui mène une quatrième tangente qui rencontre les deux côtés BD, CD en M, N, on aura $\frac{AM}{BM} = a \frac{DN}{CN}$ *a étant une constante, quelle que soit la quatrième tangente MN.*

(14) Si dans ce théorème on suppose que les deux côtés BC, CD soient en ligne droite, la conique les touchera au point C, et le point B se confondra avec le point D, l'équation deviendra donc $\frac{AM}{DM} = a \frac{DN}{CN}$, c'est-à-dire que :

Si une conique touche en A et C (fig. 6) deux droites dont le point de concours est D, et qu'on lui mène une troisième tangente qui rencontre ces deux premières en M et N, on aura $\frac{AM}{DM} = a \frac{DN}{CN}$, *a étant une constante quelle que soit la tangente MN.*

Si $a = 1$ et que les points M, N soient tous les deux en même temps sur les deux segmens DA, DC, ou sur leurs prolongemens, la conique sera une parabole; théorème qu'on a coutume d'énoncer ainsi :

Quand une parabole est inscrite dans un angle, toute tangente divise les côtés en parties inversement proportionnelles.

Cette propriété de la parabole est fort ancienne, elle se trouve dans les *coniques d'Apollonius*. On en fait usage pour déterminer les tangentes à la parabole dans les courbes de raccordement (Voyez le Mémoire de M. *De Prony*, et celui de M. *Brianchon* sur les courbes de raccordement, 10ᵉ et 19ᵉ cahiers des *Journaux de l'école Polytechnique*).

La propriété générale d'une conique qui touche deux droites

en deux points donnés, exprimée par l'équation du théorème (14), et dont celle de la parabole est un cas particulier, peut également servir pour déterminer dans de grandes constructions, sur le terrain, par des calculs arithmétiques, les tangentes à une conique assujettie à toucher trois droites dont deux en deux points donnés, ce qui est le cas *des courbes de raccordement et des arcs rampans.*

(15) L'équation du théorème (14) conduit facilement à une belle propriété des coniques, qui est due à *Apollonius*, et que *Lagrange* a rendue importante par l'emploi qu'il en a fait dans le *Traité des fonctions analitiques.* Cette propriété a été généralisée par M. *Brianchon*, et peut être énoncée ainsi :

Quand une tangente à une conique se meut entre deux tangentes fixes, le produit des distances des points où elle les rencontre aux points où ces deux tangentes rencontrent le diamètre de la courbe parallèle à la droite qui joint leurs points de contact, est constant, pour toutes les positions de la tangente mobile.

Ainsi le diamètre de la conique parallèle à la droite qui joint les deux points de contact A, C (*fig.* 6) étant EF, on aura pour toute tangente MN,

$$\mathrm{ME}.\,\mathrm{NF} = \text{const.}$$

Pour déduire cette proposition de l'équation

$$(\varphi) \;\ldots\ldots\; \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{DM}} = a\,\frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{CN}} \quad (14),$$

cherchons d'abord la position du diamètre EF. Il est également éloigné des deux tangentes parallèles à la corde AC. Pour chacune de ces deux tangentes mn, on a

$$\frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{D}m} = a\,\frac{\mathrm{D}n}{\mathrm{C}n}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{D}m} = \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{D}n}$$

d'où

$$\overline{Cn}^2 = a\,\overline{Dn}^2, \quad Cn = \pm\, Dn\sqrt{a}.$$

Cette dernière équation fait connaître les positions des deux tangentes *mn* parallèles à AC; et l'on en déduit

$$DF = \frac{DC}{1-a}, \quad DE = \frac{DA}{1-a}.$$

D'après cela, on change l'équation (φ) en celle-ci :

$$ME.\ NF.\ (1-a) = a.\ ED.\ FD - EA.\ FC.$$

Le second nombre ne contient que des quantités constantes, indépendantes de la position de la tangente mobile MN, ce qui démontre le théorème énoncé.

(16) Au lieu de considérer une conique comme l'enveloppe des projections des génératrices d'un hyperboloïde, on peut la considérer comme la suite des points d'intersection des génératrices d'un hyperboloïde par un plan; et l'on obtient d'autres théorèmes, qui seraient les corrélatifs des premiers auxquels on appliquerait les transformations polaires. Nous reviendrons sur cet objet, et ferons voir que l'une et l'autre méthodes sont propres à un grand nombre d'autres questions de géométrie plane, qui présenteraient peut-être des difficultés si on voulait les traiter par les principes seuls de la géométrie plane.

Nous terminerons cet article par l'énoncé d'une propriété des paraboles :

Quand deux paraboles sont inscrites dans un triangle, par les six points de contact on peut faire passer une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des deux paraboles.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE (1).

Sur le retour de la comète d'Encke. (Extrait d'une lettre adressée au rédacteur par M. GAMBART, directeur de l'observatoire de Marseille.)

....J'ai vu la comète le 27 dernier, et il paraîtrait qu'elle ne l'a guère été en France avant cette époque (2). Je ne vous ai point annoncé ni à personne ma première observation.... Gloire aux calculs d'Encke qui représentent, on peut dire à la minute, cette nouvelle réapparition! En effet, voici les positions déduites de mes observations. Les erreurs des éphémérides qui ont paru dans la *Connaissance des temps* de 1830, seraient de — 2′ 40″, + 1′ 55″, + 2′ 46, + 2′ 55 en ascension droite, et de — 1′ 20″ + 0′ 54″, + 0′ 46 + 1′ 41″ en déclinaison.

(1) Le défaut d'espace nous force de renvoyer à un prochain numéro la continuation de l'article *Observatoires d'Angleterre*.

(2) « *Pons* a trouvé cette comète à Florence, le 5 octobre; mais la faiblesse de sa lumière ne lui a pas permis de l'observer. Le 29, le 30 octobre et le 3 novembre, j'ai vu également la comète.... M. *South* m'annonce que, le 30 octobre, il a trouvé la comète, et ses observations donnent à cet astre exactement la même position que les Éphémérides d'*Encke* (Extrait d'une lettre de M. *Bouvard*).

DATE.		T. Mn. à Mlle.	ASC. DR. ☄	DÉCL. ☄
Octobre.	28	19.50.44	350.38.51	+ 26.20.40
		19.55.34	36.24	19.40
		20. 8.27	35. 6	21.40
Novembre.	1	18.51.10	345.51.44	25 1.35
		19.22.54	50.14	25. 2.45
	4	19.24.12	342.12.20	23.48.50
		20.11. 2	342. 9.20	22.49.55
	5	18.36.29	341. 2.11	23.25.46

Il ne faut point ici s'appesantir sur les secondes : ces observations ont été faites dans des circonstances particulières, et les plus difficiles que j'aie encore rencontrées, à cause de l'excessive difficulté de voir la comète. Celles des trois derniers jours me paraîtraient donc présenter un accord assez satisfaisant, d'autant qu'elles n'ont point été faites toutes en suivant la même méthode. Quant à celles du 28, elles ne peuvent évidemment réunir autant de probalités, vu le faible pouvoir amplifiant de la lunette que l'on a été contrait d'employer.

Marseille, le 14 novembre 1828.

MÉTÉOROGIE.

Sur les variations diurnes du baromètre, article comuniqué par M. Bouvard, de l'Institut de France.

Les savans qui se sont occupés des phénomènes météorologiques, ont porté principâlement leur attention sur les variations diurnes du baromètre, pour fixer les époques où le mercure de cet instrument se trouve à ses plus grandes et à ses plus petites hauteurs. On sait depuis long-temps que le baromètre atteint les plus grandes hauteurs vers neuf heures du matin et dix heures du soir, qu'il se trouve le plus bas possible vers quatre heures du soir et à peu près vers la même heure du matin : on sait aussi que les instans critiques du baromètre varient suivant les saisons. En été, le *maximum* du matin arrive à peu près à huit heures, et en hiver, entre neuf et dix heures; les autres époques varient également, de sorte qu'on n'a pas encore pu parvenir à fixer les époques d'une manière satisfaisante; car il est aisé de concevoir que pour déterminer la grandeur des périodes et les temps correspondans, il faudrait multiplier à l'infini les observations vers les momens où le mercure cesse de monter ou de descendre.

Jusqu'à présent, les observateurs se sont bornés à fixer approximativement la valeur de la période de neuf heures du matin à trois ou quatre heures du soir, sans pouvoir rien donner de certain ni même rien de probable relativement aux trois autres périodes diurnes.

Dans l'impossibilité de déterminer exactement les périodes et les temps correspondans, les physiciens se sont bornés à faire des observations chaque jour à des époques régulières, par

exemple à neuf heures du matin, à midi, à trois et à neuf heures du soir, et de plus à des heures différentes des précédentes. Toutes ces observations sont certainement très-précieuses sous plusieurs rapports; mais, jusqu'à présent, on n'avait pas songé au parti qu'on pouvait en tirer pour l'avancement de cette partie de la météorologie, science si peu avancée aujourd'hui, que l'on ne connaît même pas encore une seule des lois qui modifient à l'infini les variations qu'éprouve l'atmosphère terrestre.

M'étant depuis quelques années occupé de météorologie, j'ai cru qu'il serait possible de déterminer la loi et les causes des variations diurnes du baromètre, en tirant parti des observations faites dans divers endroits du globe; et comme on ne peut pas douter que la loi qui règle ces inégalités barométriques ne se renouvelle tous les jours, il est évident, ce me semble, que ce phénomène dépend uniquement de la rotation de la terre sur son axe, ou ce qui revient au même de l'action qu'exerce sur l'atmosphère terrestre le soleil considéré non comme corps attirant, mais comme corps échauffant.

La première période, celle de neuf heures du matin, à trois ou quatre heures du soir, est la plus grande, sous l'équateur et au niveau de la mer : cette période diminue en s'éloignant de l'équateur vers l'un ou l'autre pôle; à de très-grandes latitudes, elle est presque insensible, et elle doit être nulle aux pôles. Il paraît aussi que la valeur absolue de cette période diminue en s'élevant suffisamment au-dessus du niveau de la mer, de manière à devenir insensible même sous l'équateur : elle ne doit être que d'environ *douze* centièmes de millimètres à la limite des neiges perpétuelles.

Les observations barométriques que j'ai discutées, me semblent prouver d'une manière incontestable qu'*en partant de l'équateur, les périodes diminuent à peu près proportionnellement au carré du* cosinus *de la latitude*, *et que ces mêmes périodes*, *sous l'équateur, en s'élevant à de très-grandes hauteurs*, *diminuent dans le rapport inverse des températures des lieux où les observations sont faites;* ainsi, pour réduire à l'équateur et au niveau de la mer les périodes trouvées à une latitude quelcon-

que, il faut les diviser par le carré du *cosinus* de la latitude du lieu où ces observations ont été faites, et par le rapport inverse des températures moyennes correspondantes à chacune de ces quatre périodes.

La discussion des observations faites en Europe, m'a prouvé clairement que les deux premières périodes du jour, qui tombent à peu près entre neuf heures du matin et dix heures du soir, sont plus grandes que les périodes de nuit, qui arrivent entre dix ou onze heures du soir et neuf heures du matin; j'ai trouvé qu'elles sont à très-peu près dans le rapport inverse de la température moyenne du jour à la température moyenne de la nuit.

Maintenant pour déterminer par les observations, les lois des variations diurnes du baromètre, j'ai dû chercher une formule propre à les représenter. La question se réduit donc à trouver l'équation d'une courbe dont les ordonnées soient déterminées par les hauteurs observées du baromètre, et dont les abscisses soient représentées par les intervalles de temps qui séparent les observations les unes des autres, à compter de midi, origine du temps.

La formule que j'ai employée dans mes recherches pour la solution de la question, est la suivante (*):

$$a\sin.(s+m)+b\sin.(2s+n)+c\sin.(3s+p)+\text{etc.}=h_i-h_o=(i),$$

dans cette formule, composée d'un nombre quelconque de termes, h_o réprésente la hauteur du baromètre à midi, si on prend cet instant pour point de départ; h_i la hauteur du baromètre à un instant quelconque; a, b, c, etc., sont des coefficiens constans, ainsi que les arcs m, n, p, etc., que les observations feront connaître : s est l'angle horaire du soleil compté depuis midi.

(*) Cette formule a été tirée de celle que j'ai donnée à la page 40 de mon premier Mémoire sur la météorologie; elle peut également servir à calculer la température moyenne du jour et de la nuit, en supposant que h_o représente la température moyenne de midi, et h_i une température quelconque.



Cette formule peut contenir un nombre quelconque de termes; mais, si les observations sont exactes, c'est-à-dire, indépendantes des erreurs locales, les deux premiers termes de cette formule doivent seuls subsister; les autres seront nuls ou très-petits, de manière qu'il sera toujours permis de les négliger; si au contraire, ces coefficiens sont considérables, ce sera une preuve certaine que les observations employées ne sont pas dégagées des erreurs qui résultent des causes étrangères et indépendantes de la loi rigoureuse d'où dépend la cause unique des variations diurnes du baromètre.

La formule précédente fournira autant d'équations de condition qu'il y aura d'observations faites dans les vingt-quatre heures; mais si l'on n'a qu'un petit nombre d'observations, on pourra les résoudre par les méthodes ordinaires: et si par exemple, le baromètre a été observé d'heure en heure, il faudra dans ce cas général, employer la méthode des moindres carrés, comme étant la plus avantageuse. Le second membre de la formule précédente étant donné immédiatement par les observations, j'ai désigné cette quantité par le symbole (i): i pouvant représenter tous les nombres depuis zéro jusqu'à 24. Si l'on part de l'hypothèse que les observations ont été faites d'heure en heure, on aura vingt-quatre équations: décomposant les termes de cette formule et en supposant, pour abréger,

$$a \cos. m = x;\quad a \sin. m = y;\quad b \cos. n = z;\quad b \sin. n = u \text{ etc.},$$

on aura les équations de condition suivantes:

à midi $x + z + t + p + \text{etc.} = (0)$

1h. $x \cos.15^\circ + y \sin.15^\circ + z \cos.30^\circ + u \sin.30^\circ + t \cos.45^\circ + r \sin.45^\circ + p \cos.60^\circ + q \sin.60^\circ + \text{etc.} = (1)$

2h. $x \cos.30^\circ + y \sin.30^\circ + z \cos.60^\circ + u \sin.60^\circ + r - p \cos.60^\circ + q \sin 60^\circ + \text{etc.} = (2)$

3h. $x \cos.45^\circ + y \sin.45^\circ + u - t \cos.45^\circ + r \sin.45^\circ - p + \text{etc.} = (3)$

etc. etc. etc.

Ces vingt-quatre équations résolues par la méthode citée, font connaître la valeur de ces inconnues; j'ai trouvé en ne tenant compte que des huit premiers termes :

$$
\begin{aligned}
12\,x = & [\,(1) - (11) - (13) + (23)\,].\ \cos.\ 15^\circ \\
& [\,(2) - (10) - (14) + (22)\,].\ \cos.\ 30 \\
& [\,(3) - (9) - (15) + (21)\,].\ \cos.\ 45 \\
& [\,(4) - (8) - (16) + (20)\,].\ \cos.\ 60 \\
& [\,(5) - (7) - (17) + (19)\,].\ \cos.\ 75 \\
& \quad + (0) - (12).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12\,y = & [\,(1) + (11) - (13) - (23)\,]\ \sin.\ 15^\circ \\
& [\,(2) + (10) - (14) - (22)\,]\ \sin.\ 30 \\
& [\,(3) + (9) - (15) - (21)\,]\ \sin.\ 45 \\
& [\,(4) + (8) - (16) - (20)\,]\ \sin.\ 60 \\
& [\,(5) + (7) - (17) - (19)\,]\ \sin.\ 75 \\
& \quad + (6) - (18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12\,z = & [\,(1)-(5)-(7)+(11)+(13)-(17)-(19)+(23)\,]\ \cos.30^\circ \\
& [\,(2)-(4)-(8)+(10)+(14)-(16)-(20)+(22)\,]\ \cos.60 \\
& \quad (0)-(6)+(12)-(18)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12\,u = & [\,(1)+(5)-(7)-(11)+(13)+(17)-(19-(23)\,]\ \sin.30^\circ \\
& [\,(2)+(4)-(8)-(10)+(14)+(16)-(20)-(22)\,]\ \sin.60 \\
& \quad (3)-(9)+(15)-(18)
\end{aligned}
$$

$$
12\,t = \left\{ \begin{array}{l} (1)-(3)-(5)+(7)+(9)-(11)-(13) \\ +(15)+(17)-(19)-(21)+(23) \end{array} \right\} \cos.\ 45^\circ
$$
$$
(0)-(4)+(8)-(12)+(16)-(20)
$$

$$
12\,v = \left\{ \begin{array}{l} (1)+(3)-(5)-(7)+(9)+(11)-(13) \\ -(15)+(17)+(19)-(21)-(23) \end{array} \right\} \sin.\ 45^\circ
$$
$$
(2)-(6)+(10)-(14)+(18)-(22)
$$

$$12p = \left\{ \begin{array}{l} (1)-(2)-(4)+(5)+(7)-(8)-(10)+(11)+(13) \\ -(14)-(16)+(17)+(19)-(20)-(22)+(23) \end{array} \right\} \cos. 60^{\circ}$$

$$(0)-(3)+(6)-(9)+(12)-(15)+(18)-(21).$$

$$12q = \left\{ \begin{array}{l} (1)+(2)-(4)-(5)+(7)+(8)-(10)-(11)+(13) \\ +(14)-(16)-(17)+(19)+(20)-(22)-(23) \end{array} \right\} \sin. 60^{\circ}$$

Ces valeurs sont rigoureuses. Les coefficiens des inconnues sont égaux à 12, moitié du nombre des équations ; or, en désignant par n les observations employées, le coefficient des inconnues sera représenté par $\frac{n}{2}$. D'après cette remarque, on pourra toujours faire usage de ces formules pour un nombre quelconque d'observations ; car il suffira d'effacer les symboles correspondans aux heures où les observations n'ont pas été faites.

Pour montrer l'usage de ces formules, je prends pour exemple les observations faites par M. le capitaine *Freycinet* au port *Jackson*, d'heure en heure, avec deux baromètres de Fortin, du 1er au 9 décembre 1819. Ce savant a trouvé les hauteurs barométriques suivantes, réduites à zéro de température.

m.m.	m.m.	m.m.	m.m.	m.m.
h_0 = 759,52 ;	h_1 = 759,28 ;	h_2 = 758,86 ;	h_3 = 758,52 ;	h_4 = 758,44 ;
h_5 = 759,39 ;	h_6 = 758,77 ;	h_7 = 759,18 ;	h_8 = 759,35 ;	h_9 = 759,77 ;
h_{10} = 759,69 ,	h_{11} = 759,55 ;	h_{12} = 759,26 ;	h_{13} = 759,52 ;	h_{14} = 759,50 ;
h_{15} = 759,38 ;	h_{16} = 759,29 ;	h_{17} = 759,62 ;	h_{18} = 759,85 ;	h_{19} = 760,05 ;
h_{20} = 760,35 ;	h_{21} = 760;22 ;	h_{22} = 760,01 ;	h_{23} = 759.77.	

Ces observations donnent les valeurs suivantes :

(0) = 0;(1)=−0,24;(2)=−0,66;(3)=−1,00;(4)=−1,04;(5)=−1,13;
(6) −0,75;(7)=−0,34;(8)=−0,17;(9)=+0,25;(10)=+0,17;(11)=+0,03;
(12)=−0,26;(13)=0,00;(14)=−0,02;(15)=−0,14;(16)=−0,23;(17)=+0,10;
(18)=+0,33;(19)=+0,53;(20)=+0,83;(21)=+0,70;(22)=+0,49;(23)=+0,25.

Toutes ces quantités ne sont pas également bien déterminées, parce que les observations n'ont pas toujours été faites par le même observateur, ni continuées assez long-temps pour détruire entièrement les causes dépendantes des causes étrangères.

En substituant ces valeurs dans les formules précédentes, on trouve :

$$\log. x = 8{,}6150113 - ; \quad \log. y = 9{,}6986137 - ;$$
$$\log. z = 9{,}0061236 + ; \quad \log. u = 9{,}6836503 - ;$$
$$\log. t = 8{,}6768764 + ; \quad \log. v = 8{,}4690853 + ;$$
$$\log. p = 8{,}5282737 + ; \quad \log. q = 8{,}9689497 +.$$

La formule

$$a\sin.(s+m) + b\sin.(2s+n) + c\sin.(3s+p) + \text{etc.} = h_{\prime} - h_{\prime\prime}$$

devient après les substitutions, la suivante :

$$\overset{\text{m.m.}}{-\,0{,}5168}\, \sin.\,(s + 3^{\circ}.\ 0') + \overset{\text{m.m.}}{0{,}4932}.\sin.\,(2s + 168^{\circ}.8')$$
$$+\ 0{,}0581\ \sin.\,(3s + 59^{\circ}.31') + 0{,}0936\ \sin.(4s - 5^{\circ}.53') = h_{\prime} - h_{\prime\prime}$$

mais, d'après la remarque précédente, les deux derniers termes doivent être négligés; car si les observations étaient rigoureuses, ces termes devraient être infiniment plus petits, et même réduits à zéro; nous aurons donc simplement :

$$h_{o} - \overset{\text{m.m.}}{0{,}5168}\, \sin.\,(s + 3^{\circ}.0') + \overset{\text{m.m.}}{0{,}4932}\, \sin.\,(2s + 168^{\circ}.8') = h_{i}.$$

Cette formule ne peut pas représenter rigoureusement toutes les observations, puisque nous avons plus d'équations que d'inconnues; mais elle doit satisfaire à l'ensemble de toutes les observations. Voyons maintenant comment cette formule s'accorde avec les observations employées. En faisant s angle horaire du soleil, égal à 15°. 30°. 45°. etc., on trouvera les résultats suivans, que nous avons mis en regard des observations correspondantes aux différentes heures du jour.

HEURE DU JOUR.	HAUTEUR observée.	HAUTEUR calculée.	DIFFÉRENCES.
	m.m.	m.m.	m m.
Midi . . . 0h.	759,52	759,58	+ 0,06
1	759,28	759,20	— 0,08
2	758,86	758,87	+ 0,01
3	758,52	758,56	+ 0,14
4	758,44	758,60	+ 0,16
5	758,39:	758,70	+ 0,31
6	758,77	758,92	+ 0,15
7	759,18	759,20	+ 0,02
8	759,35	759,47	+ 0,12
9	759,77	759,68	— 0,09
10	759,69	759,77	+ 0,08
11	759,55	759,76	+ 0,21
12	759,26:	759,66	+ 0,40
13	759,52	759,53	+ 0,01
14	759,50	759,44	— 0,06
15	759,38	759,42	+ 0,04
16	759,29	759,51	+ 0,22
17	759,62	759,68	+ 0,06
18	759,85	759,92	+ 0,07
19	760,05	760,14	+ 0,09
20	760,35	760,31	— 0,04
21	760,22	760,30	+ 0,08
22	760,01	760,22	+ 0,21
23	759,77	759,93	+ 0,16

On voit par ce tableau que les différences entre les hauteurs observées du baromètre, et les hauteurs calculées par la formule, ne sont pas très-considérables; elles seraient encore plus petites, si les observations avaient été continuées plus long-temps.

La formule donne aussi:

	m.m.
le *maximum* du matin à 8h. 0′, et le mercure à . .	760,31
le *minimum* du soir à 4h. 5′	758,60
le *maximum* du soir à 9h. 50′	759,77
et le *minimum* du matin à 2h. 50′	759,42

On trouve par ces calculs que :

	m. m.
la période du matin à 4h. du soir, égale	1,71
celle de 4h. à 10h. du soir.	1,17
celle de 10h. du soir à 3h. du matin	0,35
et enfin, celle de 3h. à 8h. du matin.	0,89

On remarquera que les valeurs de ces périodes, ainsi que les temps correspondans, ne sont pas déterminés avec une très-grande précision; ce qui montre que pour avoir ces quantités, il faut multiplier les observations afin de détruire les erreurs produites par les causes inconnues et indépendantes de la loi qui régit les périodes diurnes. La première période de 8h. du matin à 4h. du soir, qui est la principale, est égale à 1m.m.,71 Cette période est encore beaucoup plus faible que celle qu'on déduit des observations faites sous l'équateur et au niveau de la mer et qui doit être à très-peu près égale à 3m.m,30.

Pour réduire la période trouvée 1m m.,71 à l'équateur, il faut la diviser, d'après ce qui a été dit plus haut, par le carré du *cosinus* de la latitude et la multiplier par le rapport inverse des températures moyennes. Sous l'équateur et au niveau de la mer, j'ai supposé que la température est égale à 28° centigrades,

et elle est de 21°,7 au Port-Jackson, dont la latitude est de 33°.51′ australe; on trouve enfin que la valeur de cette période, réduite au niveau de la mer, est égale à 3mm,31.

Telle est la marche que j'ai suivie dans mes recherches sur les variations diurnes du baromètre. Mais cette théorie est loin d'être complète sous plusieurs rapports. D'abord il me manque des observations, faites à de grandes latitudes, pour vérifier l'influence de la latitude, et des observations faites dans le voisinage de l'équateur au niveau de la mer pour fixer la valeur absolue des périodes diurnes. Il faudrait aussi des observations faites dans le voisinage de l'équateur, surtout à de très-grandes élévations pour déterminer l'influence du rapport inverse des températures. J'ai supposé que ce rapport était exact, mais il est possible qu'il ne soit qu'approché; il pourrait être une fonction quelconque de ce rapport. J'ai également supposé que la période était proportionnelle au carré du *cosinus* de la latitude, tandis qu'il est très-probable que ce rapport soit une fonction de cette latitude bien plus générale; mais l'imperfection des observations faites jusqu'à présent ne permet pas de constater mes conjectures à cet égard.

Les lois des variations diurnes du baromètre sont très-probablement plus compliquées que je ne suppose dans ce moment, mais j'espère que la haute analise fera connaître, en partant des données précédentes, les véritables lois de ce phénomène météorologique.

Après cet exposé de ma méthode pour calculer les variations, il ne me reste plus pour compléter mon travail, qu'à prier les savans qui s'occupent de cette science, de vouloir bien me communiquer leurs observations, surtout MM. *Boussingault* et *Rivero*, qui doivent avoir une immense collection d'observations équatoriales. Les plus importantes, pour compléter cette théorie, devraient être faites au niveau de la mer, et à de très-grandes hauteurs, par exemple à *Quito*, à *Antisana*, et à tout *autre point élevé et situé près de l'équateur, et enfin sous l'équateur et au niveau de la mer*. Les observations de M. le baron de Humboldt, faites à *Quito* et *Antisana*, sont insuffisantes, à

cause du trop petit nombre, pour montrer l'évidence ou les erreurs de mes hypothèses, sur ce phénomène si curieux et si utile pour les progrès de nos connaissances dans cette partie de la physique générale.

(*Erratum*. Au lieu de *température moyenne de midi*, page 376, dernière ligne, lisez *température moyenne de l'année*.)

PHYSIQUE.

Note sur le mouvement de la chaleur dans une sphère composée de deux parties hétérogènes et concentriques; par M. Pagani, professeur extraordinaire à l'Université de Louvain (voyez la *Correspondance*, tom. III, pag. 237).

Le problème que je me propose de résoudre maintenant consiste à intégrer les équations

$$(1)\ \frac{du}{dt}=a^2\frac{d^2u}{dx^2},\quad (1')\ \frac{du'}{dt}=a'^2\frac{d^2u'}{dx^2},$$

avec les restrictions suivantes;

1° Quelle que soit la valeur de t, on doit avoir

$$(2)\quad u=o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{pour } x=o$$

$$(2')\quad \frac{du'}{dx}+\frac{b}{a'}u'=o \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{pour } x=l+l'$$

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} u=u' \\ h\left(\frac{du}{dx}-\frac{u}{l}\right)=h'\left(\frac{du'}{dx}-\frac{u'}{l}\right)\end{array}\right\} \quad \text{pour } x=l;$$

2° En dénotant par φx, Ψx des fonctions arbitraires de x, soumises à la condition $\varphi l=\Psi l$, il faut que l'on ait

$$(4)\quad (u=\varphi x,\quad u'=\Psi x) \quad \ldots\ldots \quad \text{pour } t=o.$$

Il est bon d'observer que la première des équations (4) doit subsister depuis $x = o$ jusqu'à $x = l$, et que la seconde doit être vérifiée par toutes les valeurs de x comprises entre l et $l + l'$ inclusivement.

On peut satisfaire aux équations générales (1), (1'), en prenant

$$(5)\quad \begin{cases} u = \left(A \sin. \dfrac{\alpha x}{a} + B \cos. \dfrac{\alpha x}{a}\right) e^{-\alpha^2 t} \\ u' = \left(A' \sin. \dfrac{\alpha x}{a'} + B' \cos. \dfrac{\alpha x}{a'}\right) e^{-\alpha^2 t}, \end{cases}$$

les lettres A, A', B, B', α, désignant des constantes arbitraires que les équations de condition que nous venons de rapporter doivent nous faire connaître.

Il est d'abord évident que l'équation (2) exige que l'on ait $B = o$. En outre, si l'on substitue la valeur de u' dans l'équation (2') et si l'on pose, pour abréger,

$$(6)\quad \begin{cases} m = \alpha \sin. \dfrac{\alpha (l + l')}{a'} - b \cos. \dfrac{\alpha (l + l')}{a'} \\ n = \alpha \cos. \dfrac{\alpha (l + l')}{a'} + b \sin. \dfrac{\alpha (l + l')}{a'}, \end{cases}$$

on aura entre A' et B' la relation

$$A'n - B'm = o$$

à laquelle on peut satisfaire en prenant une nouvelle constante C, et en faisant $A' = Cm$, $B' = Cn$. De cette manière, au lieu des formules (5), nous aurons les suivantes

$$(7)\quad u = A \sin. \frac{\alpha x}{a} e^{-\alpha^2 t}$$

$$(7') \quad u' = C\left(m \sin.\frac{\alpha x}{a'} + n \cos \frac{\alpha x}{a'}\right)e^{-\alpha^2 t}.$$

En substituant ces valeurs de u et de u' dans les équations (3), on obtiendra aisément ces relations

$$A \sin.\frac{\alpha l}{a} = C\left(m \sin.\frac{\alpha l}{a'} + n \cos.\frac{\alpha l}{a'}\right)$$

$$Ah\left(\frac{\alpha l}{a}\cos.\frac{\alpha l}{a} - \sin.\frac{\alpha l}{a}\right) =$$

$$Ch'\left[\frac{\alpha l}{a'}\left(m \cos.\frac{\alpha l}{a'} - n \sin.\frac{\alpha l}{a'}\right)\right.$$

$$\left. - m \sin.\frac{\alpha l}{a'} - n \cos.\frac{\alpha l}{a'}\right];$$

et en observant qu'en vertu des formules (6) on a identiquement

$$(6') \quad \begin{cases} m \sin.\frac{\alpha l}{a'} + n \cos.\frac{\alpha l}{a'} = \alpha \cos.\frac{\alpha l'}{a'} + b \sin.\frac{\alpha l'}{a'} \\ m \cos.\frac{\alpha l}{a'} - n \sin.\frac{\alpha l}{a'} = \alpha \sin.\frac{\alpha l'}{a'} - b \cos.\frac{\alpha l'}{a'}, \end{cases}$$

il sera facile d'obtenir, des deux équations précédentes, celles-ci

$$A = \frac{C}{\sin.\frac{\alpha l}{a}}\left(\alpha \cos.\frac{\alpha l'}{a'} + b \sin.\frac{\alpha l'}{a'}\right)$$

$$(8) \quad \begin{aligned} &\left(\alpha \cos.\frac{\alpha l'}{a'} + b.\sin.\frac{\alpha l'}{a'}\right)\left(h\frac{\alpha l}{a}\cos.\frac{\alpha l}{a} + (h' - h)\sin.\frac{\alpha l}{a}\right) \\ &-\left(\alpha \sin.\frac{\alpha l'}{a'} - b \cos.\frac{\alpha l'}{a'}\right) h'\frac{\alpha l}{a'}\sin.\frac{\alpha l}{a} = o \end{aligned}$$

dont la dernière, qui ne contient d'autres inconnues que α, servira à déterminer toutes les valeurs de cette quantité. Quant à la première de ces équations, elle nous donne immédiatement la constante A en fonction de α et du coefficient C qui reste encore indéterminé.

Au moyen de cette valeur de A, et en posant, pour plus de simplicité,

$$(9) \qquad y_\alpha = \frac{a \cos. \frac{\alpha l'}{a'} + b \sin. \frac{\alpha l'}{a'}}{\sin. \frac{\alpha l}{a}} \sin. \frac{\alpha x}{a},$$

la valeur de u de la formule (7) devient

$$u = C y_\alpha e^{-\alpha^2 t}.$$

Nous pouvons substituer dans cette formule, à la place de α, chacune des racines de l'équation (8), lesquelles racines sont toutes réelles et en nombre infini; et si, à chaque substitution, nous changeons la constante C, nous obtiendrons une infinité d'intégrales particulières dont la somme satisfera également à l'équation générale (1), et aux équations particulières (2) et (3). Nous aurons donc

$$(10) \qquad u = \Sigma C y_\alpha e^{-\alpha^2 t},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles de α données par l'équation (8).

On obtiendra pareillement

$$(10') \qquad u' = \Sigma C z_\alpha e^{-\alpha^2 t},$$

en faisant

$$(11) \qquad z_\alpha = m \sin. \frac{\alpha x}{a'} + n \cos. \frac{\alpha x}{a'}.$$

Avant d'aller plus loin, il est bon de nous arrêter à l'examen des propriétés dont jouissent les fonctions que nous avons désignées par y_α et z_α, d'autant plus que c'est sur ces propriétés que repose l'analise qui doit nous conduire à la détermination de tous les coefficiens C qui entrent dans les formules (10). Pour y parvenir plus facilement, dénotons par y'_α, z'_α, y''_α, z''_α, les dérivées premières et secondes des fonctions y_α, z_α, prises par rapport à x seule, et nous aurons visiblement

$$(12)\quad y''_\alpha + \frac{\alpha^2}{a^2} y_\alpha = o$$

$$(12')\quad z''_\alpha + \frac{\alpha^2}{a'^2} z_\alpha = o$$

$$(13)\quad y_\alpha = o \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{pour } x = o$$

$$(13')\quad z'_\alpha + \frac{b}{a'} z_\alpha = o \;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{pour } x = l + l'$$

$$(14)\left\{\begin{array}{l} y_\alpha = z_\alpha \\ h\left(y'_\alpha - \frac{y_\alpha}{l}\right) = h'\left(z'_\alpha - \frac{z_\alpha}{l}\right) \end{array}\right\} \text{pour } x = l$$

On obtiendrait le même système d'équations en changeant α en α', pourvu que les quantités α, α' soient racines de l'équation (8). Cela posé, on aura, en vertu de l'équation (12),

$$(15)\qquad \int y_\alpha y_{\alpha'}\,dx = -\frac{a^2}{\alpha^2}\int y''_\alpha y_{\alpha'}\,dx$$

mais en intégrant par parties, on a

$$\int y''_\alpha y_{\alpha'}\,dx = y'_\alpha y_{\alpha'} - y_\alpha y'_{\alpha'} + \int y_\alpha y''_{\alpha'}\,dx;$$

d'ailleurs on doit avoir $y''_{\alpha'} = -\frac{\alpha'^2}{a^2} y_{\alpha'}$; on trouvera donc, en

substituant ces valeurs dans l'équation (15), et en réduisant,

$$\frac{\alpha^2-\alpha'^2}{a^2}\int y_\alpha y_{\alpha'}\,dx = y_\alpha y'_{\alpha'} - y'_\alpha y_{\alpha'}.$$

Le second membre de cette équation étant nul à la limite $x=o$, on en déduit

$$(16)\quad \frac{\alpha^2-\alpha'^2}{a^2}\int_o^l y_\alpha y_{\alpha'}\,dx = (y_\alpha y'_{\alpha'} - y'_\alpha y_{\alpha'})_{x=l};$$

en nous rappelant que la notation employée dans le second membre de cette équation exprime qu'il faut faire $x=l$ après la différentiation relative à x.

On arrivera de la même manière à la formule

$$(17)\quad \frac{\alpha^2-\alpha'^2}{a'^2}\int_l^{l+l'} z_\alpha z_{\alpha'}\,dx = -(z_\alpha z'_{\alpha'} - z'_\alpha z_{\alpha'})_{x=l},$$

en observant que la quantité comprise entre les parenthèses se réduit à zéro lorsque $x=l+l'$; et cela en vertu de l'équation (13').

Multiplions les deux membres de l'équation (16) par h, et les deux membres de l'équation (17) par h'; nous aurons, en ajoutant les produits,

$$(18)\quad \frac{h}{a^2}\int_o^l y_\alpha y_{\alpha'}\,dx + \frac{h'}{a'^2}\int_l^{l+l'} z_\alpha z_{\alpha'}\,dx =$$

$$\left[\frac{(y_\alpha y'_{\alpha'} - y'_\alpha y_{\alpha'}) - h'(z_\alpha z'_{\alpha'} - z'_\alpha z_{\alpha'})}{\alpha^2-\alpha'^2}\right]_{x=l}.$$

Le second membre de cette équation se réduira à zéro, en

vertu des équations (14) et de ses analogues relatives à α', toutes les fois que α et α' seront deux racines différentes de l'équation (8); mais lorsqu'on fera $\alpha' = \alpha$, il ne sera plus nul quoique sous la forme $\frac{o}{o}$; et il sera facile d'en trouver la vraie valeur au moyen de la différentiation. La propriété remarquable dont jouit le premier membre de l'équation (18) d'être égal à zéro pour des valeurs de α' différentes de α, va nous servir à déterminer l'inconnue C qui entre dans les formules (10).

En effet, substituons les valeurs de u et de u', données par les formules (10) et (10'), dans les équations (4); celles-ci deviendront

$$\Sigma C y_\alpha = \varphi x, \quad \Sigma C z_\alpha = \Psi x.$$

Multiplions la première de ces équations par $\frac{h y_{\alpha'}}{a^2} dx$ et intégrons depuis zéro jusqu'à l, nous aurons

$$\frac{h}{a^2} \Sigma C \int_o^l y_\alpha y_{\alpha'} \, dx = \frac{h}{a^2} \int_o^l y_{\alpha'} \varphi x dx;$$

pareillement la seconde équation nous donnera

$$\frac{h'}{a'^2} \Sigma C \int_l^{l+l'} z_\alpha z_{\alpha'} \, dx = \frac{h'}{a'^2} \int_l^{l+l'} z_{\alpha'} \Psi x dx.$$

En ajoutant ces équations, membre à membre, et en faisant

$$p = \frac{h}{a^2} \int_o^l y_\alpha \varphi x dx + \frac{h'}{a'^2} \int_l^{l+l'} z_\alpha \Psi x dx,$$

$$q = \frac{h}{a^2} \int_o^l y_\alpha^2 dx + \frac{h'}{a'^2} \int_l^{l+l'} z_\alpha^2 dx,$$

on aura, en vertu de l'équation (18),

$$C = \frac{p}{q}.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à développer les valeurs de p et de q pour tâcher de réduire la fraction de $\frac{p}{q}$ à sa plus simple expression.

Pour obtenir la valeur de q il suffit de différentier, par rapport à α', les deux termes de la fraction qui forme le second membre de l'équation (18), et de faire $\alpha' = \alpha$ après la différentiation. On aura donc, en observant qu'à la limite $x = l$ on doit avoir

$$z_\alpha = y_\alpha, \quad \frac{dz_\alpha}{d\alpha} = \frac{dy_\alpha}{d\alpha}, \quad hy'_\alpha - h'y'_\alpha = \frac{h-h'}{l} y_\alpha,$$

comme il résulte des équations (14),

$$q = \left\{ \frac{y_\alpha}{2\alpha} \times \frac{d.}{d\alpha} \left(\frac{h-h'}{l} y_\alpha - hy'_\alpha + h'z'_\alpha \right) \right\} x = l.$$

Mais, en vertu des équations (9) et (11), et en ayant égard aux formules (6′), on trouve sans peine

$$\left(\frac{h-h'}{l} y_\alpha - hy'_\alpha + h'z'_\alpha \right)_{x=l} =$$

$$\left(a \cos. \frac{\alpha l'}{a'} + b \sin. \frac{\alpha l'}{a'} \right) \left(\frac{h-h'}{l} - h \frac{\alpha}{a} \frac{\cos. \frac{\alpha l}{a}}{\sin. \frac{\alpha l}{a}} \right)$$

$$+ \left(a \sin. \frac{\alpha l'}{a'} - b \cos. \frac{\alpha l'}{a'} \right) h' \frac{\alpha}{a'},$$

formule où il est aisé de reconnaître le premier membre de l'équation (8) divisé par $-l \sin. \frac{\alpha l}{a}$. Par conséquent, si nous désignons par s la fonction qui forme le premier membre de l'équation (8), nous aurons enfin

$$(19) \qquad q = -\frac{\alpha \cos. \frac{\alpha l'}{a'} + b \sin. \frac{\alpha l'}{a'}}{2\alpha l \sin. \frac{\alpha l}{a}} \frac{ds}{d\alpha}.$$

Pour développer la valeur de p, on observera que l'équation (11), en égard aux formules (6), peut aisément se mettre sous cette forme

$$z_\alpha = \left(\alpha \cos. \frac{\alpha l'}{a'} + b \sin. \frac{\alpha l'}{a'}\right) \cos. \frac{\alpha (l-x)}{a'}$$

$$- \left(\alpha \sin. \frac{\alpha l'}{a'} - b \cos. \frac{\alpha l'}{a'}\right) \sin. \frac{\alpha (l-x)}{a'};$$

et en substituant dans cette équation la valeur du coefficient de $\sin. \frac{\alpha (l-x)}{a'}$, déduite de l'équation (8), on trouvera

$$z_\alpha = \frac{\alpha \cos. \frac{\alpha l'}{a'} + b \sin. \frac{\alpha l'}{a'}}{\sin. \frac{\alpha l}{a}} \left\{ \sin. \frac{\alpha l}{a} \cos. \frac{\alpha (l-x)}{a'} \right.$$

$$\left. - \frac{h \frac{\alpha l}{a} \cos. \frac{\alpha l}{a} + (h'-h) \sin. \frac{\alpha l}{a}}{h' \frac{\alpha l}{a'}} \sin. \frac{\alpha (l-x)}{a'} \right\}.$$

Maintenant, si nous substituons cette expression de z_α et celle

de y_α dans la valeur de p, et si nous divisons ensuite le résultat par la valeur de q de la formule (19), nous aurons pour dernier résultat

$$C = \frac{P}{\frac{ds}{d\alpha}},$$

en faisant

$$P = -\frac{2h\alpha l}{a^2}\int_0^l \sin.\frac{\alpha x}{a}\varphi x dx - \frac{2h'\alpha l}{a'^2}\sin.\frac{\alpha l}{a}\int_l^{l+l'} \cos.\frac{\alpha(l-x)}{a'}\Psi x dx$$

$$+\frac{2}{a'}\left(h\frac{\alpha l}{a}\cos.\frac{\alpha l}{a} + (h'-h)\sin.\frac{\alpha l}{a}\right)\int_l^{l+l'} \sin.\frac{\alpha(l-x)}{a'}\Psi x dx.$$

En substituant cette dernière valeur de C, ainsi que celles de y_α et de z_α, dans les formules (10) et (10'), on aura les intégrales complètes des équations (1) et (1'); et l'on peut voir aisément qu'elles coïncident avec les formules de M. *Poisson*.

Sur les apparences que présentent deux lignes qui tournent autour d'un point, avec un mouvement angulaire uniforme, extrait d'une lettre adressée au rédacteur par M. Plateau.

En travaillant à mes premières expériences relatives aux sensations, j'avais observé qu'en faisant tourner rapidement une roue dentée dont les dents étaient perpendiculaires à son plan, et en plaçant l'œil à quelque distance dans le prolongement de ce plan, on apercevait l'image d'une série de dents parfaitement immobiles; que de même deux roues concentriques tournant l'une derrière l'autre avec des vitesses considérables et en sens contraire produisaient dans l'œil la sensation d'une roue fixe; j'avais remarqué de plus que lorsque les deux roues n'étaient pas concentriques, l'image fixe se composait de lignes courbes; mais satisfait d'avoir trouvé une explication naturelle du fait dans le cas de la roue dentée et des roues concentriques, j'en étais de-

meuré là. Cependant je lus, il y a quelque temps, dans les *transactions philosophiques* un mémoire de M. *Roget*, où il rend compte d'une apparence singulière que présente une roue qui roule avec rapidité derrière une série d'ouvertures verticales, comme par exemple, la roue d'une voiture derrière une palissade, les rayons, dit-il, présentent alors à l'œil une série de courbes qui paraissent complétement en repos, quoique la roue se meuve rapidement. L'auteur donne la figure de ces courbes et explique le phénomène de la manière la plus simple.

Frappé de l'analogie de ce fait avec ceux que j'avais observés, je résolus de les examiner de plus près, et j'arrivai au résultat suivant :

Si l'on suppose deux courbes brillantes quelconques tournant d'un mouvement uniforme, mais avec une grande vitesse, dans des plans parallèles, autour d'un centre commun ou de deux centres différens ; l'œil placé devant le système distinguera, au milieu de l'espèce de gaze produite par le mouvement des deux lignes, l'image immobile d'une troisième courbe plus sombre que le fond sur lequel elle se dessine. Ce spectre curviligne est le lieu des points d'intersection successifs des deux lignes en mouvement (1).

Les courbes mobiles peuvent par exemple être découpées dans du papier blanc très-épais, et tout le système doit-être placé devant une surface noire.

Ainsi généralisé, il m'a semblé que le phénomène devenait intéressant ; il offre une manière toute neuve de présenter à l'œil

(1) Il ne s'agit évidemment ici que des points d'intersection apparens, puisque les courbes tournant dans des plans différens, ne peuvent se couper : aussi l'image fixe change avec la position du spectateur, il faut aussi remarquer que la plus grande des deux vitesses doit être un multiple exact de l'autre. En effet, il faut que quand la courbe qui se meut le moins vite aura fait une révolution entière, l'autre soit également revenue à sa position initiale, sans quoi pendant la seconde révolution de la première, une nouvelle courbe serait décrite, et l'œil ne pourrait apercevoir d'image immobile.

les courbes les plus variées. Venons-en maintenant à l'explication : supposons, pour fixer les idées, que les deux lignes mobiles soient des droites tournant autour de deux centres différens; soient A et B ces centres (*fig.* 7), AA′ et AA″ deux positions successives de la première droite, BB′ et BB″ deux positions successives de la seconde, de manière que les deux droites partant ensemble des positions AA′, BB′, arrivent ensemble aux positions AA″, BB″; soit enfin *prq* la ligne des points d'intersection des deux droites dans ce trajet.

Les deux droites s'étant croisées sur tout le cours de la ligne *prq*, chacun des points de cette ligne n'a pu envoyer à l'œil que l'impression produite par la droite la plus rapprochée du spectateur, tandis que tous les autres points du quadrilatère *mpnq* ne recevant que successivement chacune des deux lignes mobiles, ils envoient à l'œil deux impressions. La ligne *prq* doit donc paraître moins brillante que le reste du quadrilatère, et il doit en être de même pour toute la suite des points d'intersection; enfin la même chose se répétant chaque fois que les droites reviennent à la même position, il doit en résulter une image fixe qui subsiste tant que dure le mouvement des droites. On conçoit d'ailleurs que la vitesse doit être assez considérable pour que l'œil ne puisse distinguer les lignes en mouvement.

Les courbes fixes obtenues de cette façon singulière sont, vous le sentez, très-diversifiées ; mais ce que vous apprendrez sans doute avec plaisir, c'est qu'en prenant pour lignes mobiles deux droites, et en leur donnant des vitesses dont l'une soit double de l'autre, le spectre résultant est une focale (1). Les deux vitesses doivent être dirigées dans le même sens.

Si, à l'origine du mouvement les deux droites sont perpendiculaires à la ligne qui joint les deux centres de rotation (je suppose ici pour la rigueur géométrique que les deux droites tournent dans le même plan), on obtient la focale du cylindre;

---

(1) On pourra voir à la page 37 de ce volume les motifs qui m'ont fait donner à cette courbe le nom de *focale*. A. Q.



si, dans leur position initiale, les droites sont toutes deux dirigées suivant la ligne des centres, la focale se réduit à un cercle et à une droite qui le traverse; dans tous les autres cas, on obtient la focale ordinaire du cône. Le point où les deux branches se croisent se trouve au centre du mouvement le plus lent. Ainsi, à part le spectre curviligne, voilà une nouvelle génération très-simple de la focale, au moyen de deux droites. J'ai fait construire un instrument au moyen duquel je pourrai produire ces images fixes avec facilité, et je me réjouis de voir ainsi les courbes se dessiner dans l'air.

Liége, 20 novembre 1828.

REVUE SCIENTIFIQUE.

Mémoires couronnés en 1826 *et* 1827, *par l'Académie Royale de Bruxelles*, tome VI, in-4°; Bruxelles, *Hayez*, 1827.

Le volume que nous annonçons contient quatre mémoires qui traitent de différens points historiques; ce motif nous détermine à ne faire connaître que sommairement leur contenu.

M. *Belpaire*, ancien élève de l'école polytechnique, s'est occupé des *changemens qu'a subis la côte d'Anvers à Boulogne*; son travail présente les chapitres suivans : I L'état des côtes sous la domination des Romains; II leur état actuel; III causes des changemens survenus sur les mêmes côtes; IV preuves qui établissent la réalité des causes assignées par l'auteur; V inondations qui ont eu lieu sur les côtes; VI, VII, VIII et IX changemens produits par ces inondations; X de la position de quelques ports mentionnés par les anciens.

Voici les questions auxquelles répondent les trois autres mémoires : En quels temps les corporations connues sous le nom de métiers (*neeringen en ambachten*) se sont-elles établies dans les provinces des Pays-Bas? quels étoient les droits, priviléges et attributions de ces corporations? et par quels moyens parvenait-on à y être reçu et à en devenir membre effectif? Par M. *Pycke*, membre des États-Généraux. — Donner un précis historique de l'administration générale des Pays-Bas Autrichiens, sous le règne de Marie-Thérèse, par M. *Steur*, avocat. — Quels ont été les changemens introduits dans l'instruction publique en

ce pays, depuis le commencement du règne de Marie-Thérèse usqu'à ce jour? et quelle a été l'influence de ces changemens sur la propagation des lumières en général, et sur la culture des sciences et des lettres en particulier, par M. *Raingo*, professeur au collége de Mons.

Traité de Géométrie descriptive, comprenant les applications de cette géométrie aux ombres, à la perspective et à la stéréotomie, avec 69 pl., in-4° et 5 in-folio, par M. *Hachette*, etc., 2e édition. Paris, chez *Corby*, 1 vol. in-4°. 1828.

L'ouvrage de M. *Hachette* est depuis long-temps favorablement jugé par des géomètres; notre but en l'annonçant est donc moins de le faire connaître que de signaler à l'attention de nos lecteurs, la nouvelle édition qui vient de paraître. Ils y trouveront des changemens heureux et plusieurs additions intéressantes. Quelques-unes de ces additions, qui nous avaient été communiquées obligeamment par l'auteur, ont déjà paru dans ce recueil. Depuis *Monge*, la géométrie descriptive a pris de nouveaux développemens; l'ouvrage de M. *Hachette*, tel qu'il est à présent, est le traité le plus complet que nous connaissions sur cette partie intéressante des mathématiques.

Recherches sur la statistique physique, agricole et médicale de la province de Liége, par *R. Courtois*; tome II, in-8°. Verviers, chez *Beausays*, 1828.

Nous avons annoncé la première section de l'ouvrage de M. *Courtois*, à la page 198 de ce volume; l'auteur dans la seconde section, présente le complément de ses recherches statistiques. Il s'est occupé avec un soin particulier de la partie botanique et zoologique de son travail, partie dont il semble avoir fait une étude particulière. L'examen des causes qui influent d'une manière spéciale sur la santé et les maladies des habitans, ainsi que l'examen des maladies auxquelles les différentes classes sont plus particulièrement assujetties, forment l'objet de deux chapitres assez étendus. L'ouvrage se termine par des recherches sur les hospices, la police médicale et la population de la province. On

sera peut-être charmé de trouver ici le nombre des suicides qui ont eu lieu pendant les dix dernières années ; cet élément statistique manque encore pour notre royaume.

ANNÉES.	DANS LES VILLES.	DANS LES CAMPAGNES.	TOTAL.
1817.	4	4	8
1818.	4	1	5
1819.	3	2	5
1820.	3	2	5
1821.	5	2	7
1822.	5	1	6
1823.	4	3	7
1824.	12	5	17
1825.	4	3	7
1826.	6	6	12
TOTAUX	50	29	79

La statistique complète d'une province est un travail qui se compose de tant d'élémens divers, qu'on ne peut raisonnablement pas l'exiger d'un seul homme. Nous aurions donc mauvaise grâce de reprocher à M. *Courtois* quelques lacunes que présente son ouvrage ; nous n'avons rien trouvé, par exemple, sur l'état financier et commercial de la province ; rien sur ce qui concerne l'état de l'instruction et celui des crimes et des délits ; rien sur la consommation et les produits des octrois ; ces omissions sont nombreuses sans doute ; aussi nous aimons mieux voir dans l'ouvrage ce qu'a fait l'auteur que ce qu'il a laissé à faire, et sous le premier rapport nous ne lui devons que des éloges.

—M. le docteur *Heyfelder* vient de faire paraître à Berlin des recherches très-curieuses sur le suicide. Il résulte de ces recherches qu'il faut compter annuellement sur 100,000 individus, 14 suicides dans la province de Brandebourg ; 10 en Saxe ;

9 Silésie; 7 Prusse orientale; 7 Poméranie; 6 Prusse occidentale; 5 Posen; 4 Clèves et Berg; 3 Westphalie; 2 Bas-Rhin.

A Berlin, on n'a compté de 1788 à 1797 que 62 suicides; 123 de 1797 à 1808; et de 1813 à 1822, on en a compté jusqu'à 546.

Dans le département de la Seine, on a compté de 1817 à 1826, les nombres suivans de suicides : 351, 330, 376, 325, 348, 317; 390, 371, 396 et 511.

A S[t] Pétersbourg, où sur une population de 285,000 âmes, on n'avait compté de 1808 à 1811 que 94 suicides; on en a compté annuellement de 1823 à 1826, les nombres suivans : 986, 1069, 1066, 966, 1176.

A Hambourg, de 1817 à 1822, les nombres des suicides ont été 2, 18, 17, 12, 10, 20, 59; en 1827, on en comptait 60.

A Francfort-sur-le-Mein, dont la population est de 56000 habitans, les suicides ont été au nombre de 100 en 1823.

Il résulte de l'ensemble des recherches de M. *Heyfelder*, que le nombre des suicides va continuellement croissant.

— Nous devons à l'obligeance de M. *Babbage*, la communication des corrections suivantes qu'il convient de faire aux tables de Taylor.

cos.	14°	18′	3″	*au lieu de*	3398	*lisez*	3298
sin.	25	5	4	——	3173	—	3183
			5	——	3218	—	3228
			6	——	3263	—	3273
			7	——	3308	—	3318
			8	——	3353	—	3363
			9	——	3398	—	3408
tang.	18	0	10	——	5064	—	6064
	6	45	52	——	10001	—	11001

—Le 3 décembre, vers 6 heures du soir, on a éprouvé un nouveau tremblement de terre dans les environs de Liége. Ce phénomène s'est fait ressentir particulièrement à Spa, Verviers, Stavelot, Aix-la-Chapelle, Liége, etc. Plusieurs habitations ont été endommagées; il paraît qu'on a ressenti deux secousses suc-

cessives qui n'ont duré que quelques secondes; la dernière a été accompagnée d'un bruit sourd semblable à une détonation souterraine. Le mouvement semble avoir été vertical. Une circonstance particulière a accompagné ce phénomène et mérite d'être rapportée; c'est que le baromètre était fort élevé, tandis que le contraire a eu lieu d'une manière très-prononcée lors du tremblement de terre, le 23 février dernier (*voyez* page 185 de ce volume). Je regrette qu'on n'ait pas donné d'une manière précise la hauteur du mercure à Liége; lors des dernières secousses; elle était à Bruxelles, vers 9 heures du matin à $0^m,7741$; et, la veille du tremblement de février dernier, à $0^m,7377$. Le 21 mars de cette année, vers 3 heures de l'après-midi, le baromètre a été un peu plus bas encore, et le lendemain matin des secousses se sont fait ressentir dans les environs de Wavre, comme nous l'avons aussi annoncé à cette époque (*voyez* p. 203.)

— Nous avons reçu successivement six nouveaux cahiers des *Leçons sur la mécanique et les machines*, par M. *Dandelin*, de sorte que jusqu'à présent il a paru en tout 16 livraisons. Nous nous bornerons à annoncer leur contenu, en nous réservant de revenir sur cette publication : nous le ferons avec d'autant plus de plaisir que nous tâcherons de suppléer ainsi au silence de la plupart de nos journaux, qui ont à peine fait mention du travail de M. *Dandelin*.

Suite de la détermination de la résistance des barres de différentes substances : tables y relatives; de la balance, de sa construction, de ses diverses variétés et de ses usages; du tour ou treuil; du frottement sur les tourillons; du frottement sur la roue et l'arbre; de l'action due à la roideur et au frottement des cordes; modifications du tour; de l'équilibre de quelques systèmes variables.

—Nous avons reçu de Leyde, une brochure de M. *J.S. Bevel*, *sur la quadrature du cercle :* l'auteur part de ce principe faux que la base d'une cycloïde est égale au double du diamètre du cercle générateur, plus la double tangente de l'angle de 30 degrés. Nous avons peine à concevoir comment M. *Bevel*, qui est

docteur en sciences, a pu se méprendre à ce point; nous avons été étonnés aussi de voir figurer dans cette brochure le nom d'une autre personne, qui du reste a réclamé depuis contre la participation qu'on lui attribuait à ce travail.

— M. *A. Balbi*, auteur de l'*Atlas Ethnographique* et de plusieurs ouvrages statistiques justement estimés, vient de publier un nouveau travail intitulé : *La monarchie française comparée aux principaux états du globe*. Ce travail, qui est le résultat de recherches nombreuses et d'études profondes, a pour objet de présenter dans un cadre assez resserré les élémens statistiques les plus importans des différentes parties du globe, en rapport avec ceux de la France: il est divisé en trois parties principales, composant un grand tableau in-folio. La première, intitulée : *Esquisse statistique*, contient, en dix-neuf colonnes, le nom et et la position de chaque département de la France, avec les divers aperçus qui leur sont relatifs; la seconde : *Parallèle entre la monarchie française et les principaux états du monde*, offre, en neuf colonnes, l'étendue, la population absolue et relative, le revenu et la dette publique, etc., de ces divers états; enfin, la troisième : *Résumés statistiques*, renferme en 28 articles, sur le sujet précédent, des comparaisons dont l'ensemble était resté jusqu'à présent inaperçu. Nous présenterons ici quelques-uns de ces rapports.

	RAPPORT du revenu à la POPULAT.	RAPPORT de la dette à la POPULAT.	RAPPORT de l'armée à la POPULAT.	RAPPORT de la flotte à la POPULATION.
	pour 1 habitant fr.	pour 1 hab. fr.	1 soldat sur hab.	vaiss. lig. et frég. par h.
Royaume-Unis.	65,2	869	229	82,979
France.	30,9	145	138	290,909
Pays-Bas. . . .	26,3	635	142	170,536
Prusse	17,2	29,3	80	——
États-Unis . . .	12,1	34,8	1977	316,000
Autriche. . . .	10,9	46,6	118	2,909,091
Russie	6,6	21,4	57	686,250

Le même tableau renferme des données très-curieuses sur le nombre d'étudians dans les universités les plus fréquentées. Voici les nombres les plus forts : Paris, 10,250 ; Cambridge, 4866 ; Oxford, 4792 ; Édimbourg, 2250 ; Prague, 2055 ; Vienne, 2000 ; Turin, 1807 ; Berlin, 1732 ; Munich, 1602 ; etc. On trouve aussi l'indication des bibliothèques les plus riches ; celle des écrits périodiques ; des imprimeries, etc.

Programme de la Société des Sciences Naturelles de Liége (1).

La société des sciences naturelles de Liége a tenu, le 14 novembre dernier, la sixième séance anniversaire de sa fondation.

La séance commence par une discours de M. *Leclercq*, président sortant, dans lequel, après avoir tracé rapidement l'histoire des sciences naturelles dans le pays de Liége, il examine les diverses institutions qui ont concouru à leurs progrès. Passant ensuite à la société des sciences naturelles, il rappelle les circonstances de sa fondation et la marche qu'elle a suivie dans ses travaux.

Les deux secrétaires de section et le secrétaire général lisent ensuite leurs rapports sur les objets qui concernent leurs gestions.

Il résulte de ces différens rapports qu'on a lu à la société cinquante-deux mémoires, depuis le 14 novembre 1827. Nous en citerons ici quelques-uns :

Mémoire sur le gisement et le traitement du schiste alumineux sur la *rive gauche* de la Meuse, par M. *Bidaut.*

Mémoire sur l'histoire, le gisement et la formation de la houille, par M. *Wellekens*.

Mémoire sur les lois suivant lesquelles agissent la cohésion et la force répulsive du calorique, par M. *Plateau.*

Notice sur un nouveau réactif pour l'acide nitrique, par M. *E. Jacquemyns*.

---

(1) Voyez page 9 de ce volume.

Mémoire sur l'application de la balance romaine au commerce, par M. *Piette*.

Mémoire sur la distillation du bois, par M. *D. Leclercq*.

Mémoire sur les mines de fer des environs de Huy, par M. *Dumont*.

Notice sur le gisement de la tourbe de Grivegnée, aux environs de Liége, par M. *Davreux*.

Mémoire sur un perfectionnement fait aux balances romaines, par M. *Van Panhuys*.

Mémoire sur la classification des corps simples, par M. *Rucloux*.

Mémoire sur la chute d'une lentille le long d'un plan incliné et sur quelques propriétés des surfaces, par M. *Nerenburger*.

Mémoire sur le soufre natif contenu dans les géodes de fer hydraté de Bonnine (Namur), par M. *Dethier*.

Mémoire sur l'influence locale dans les opérations chimiques, par M. *Craninx*.

Deux mémoires sur la culture du mûrier dans le royaume des Pays-Bas; l'un par M. *Bellefroid*, l'autre par MM. *E. Jacquemyns* et *Stephens*.

Mémoires sur les cryptogames, les orchidées et les véroniques du Grand-Duché de Luxembourg, par M. *Marchand*.

Notice sur les bruyères du cap de Bonne-Espérance, par M. *Stephens*.

Par suite de l'appel qu'elle a fait au public en 1827 et 1828, la société a reçu, pendant le cours de cette année, quatorze questions touchant différentes branches de l'industrie. Quelques-unes avaient pour objet l'analise de minerais de plomb, de manganèse, de zinc, de fer, etc.; d'autres étaient relatives à différentes industries, telles que l'orfèvrerie, la culture du houblon, la brasserie, la chapellerie, etc.

La société a reçu, depuis sa dernière séance anniversaire, quarante-cinq membres effectifs, honoraires et correspondans.

La séance se termine par un discours du nonveau président, M. *Davreux*, dans lequel il fait sentir toute l'importance des

sciences naturelles, et surtout l'influence qu'elles exercent sur le perfectionnement des arts.

La société propose, pour le concours de 1829, la question suivante :

Exposer l'histoire chimique de la matière colorante du sang, et rechercher à quels usages cette substance peut servir dans les arts.

Pour le concours de 1830, la société propose la question suivante :

Donner une notice sur la vie et les ouvrages des hommes nés sur le sol du royaume des Pays-Bas, qui se sont fait un nom dans les sciences naturelles et mathématiques.

Le prix de chacune de ces questions sera une médaille d'or de la valeur de 50 florins. Les mémoires, écrits en français, hollandais ou latin, seront adressés franc de port, avant le 15 juillet, à M. *C. Wellekens*, secrétaire général. Ils ne seront pas écrits de la main de l'auteur; ils porteront une épigraphe et seront accompagnés d'un billet cacheté, contenant la signature de l'auteur et présentant à l'extérieur la même épigraphe. La société est propriétaire de tous les mémoires envoyés au concours.

QUESTIONS.

I. Donnez la théorie mathématique des lignes apparentes que produisent deux lignes en tournant rapidement autour de deux points. (*Voyez* page 394 de ce volume).

II. En faisant avancer de m degrés l'aiguille de la spirale d'une montre, on observe que celle-ci avance de p minutes en a heures, tandis qu'elle retarde de q minutes en b heures, si l'on fait reculer cette aiguille de n degrés ; on demande à combien de degrés du point de départ il faudra s'arrêter pour que la montre marche régulièrement.

FIN DU TOME QUATRIÈME.

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS LE IVe VOLUME.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

GÉOMÉTRIE.

ANALISE.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Pages

MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES.

GÉOMÉTRIE.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

ANALISE.

MÉCANIQUE ANALITIQUE.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

ASTRONOMIE.

PHYSIQUE.

MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.

MÉTÉOROLOGIE.

STATISTIQUE.

REVUE SCIENTIFIQUE.

FIN DE LA TABLE GÉNÉRALE.

ERRATA.

Page 22, ligne 2, en remontant, Chales, *lisez* Chasles.

— 40, — 12, T sin. $\beta =$, *lisez* T sin. $\beta = o$.

— 117, — 6, sn. α, *lisez* sin. α.

— 203, — 7, en remontant, 0m.,3872, *lisez* 0m.,7328.

— 376, dernière ligne, *température moyenne de midi*, lisez *températurature moyenne de l'année*.

Dans le tome III :

Page 246, ligne 5, en remontant, les élémens de la province de Gueldre ont été omis

Gueldre. . . . . 279,226 . . . . 517,098 53,99

Page 271, ordre des alinéa : 1° soient prolongés etc. ; 2° les mêmes, etc.; 3° on a donc, etc.; 4° on peut aussi etc.; 5° pour abréger etc.; 6° cela posé, etc.; 7° lorsqu'une conique, etc.

Page 282, le radical $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ doit être remplacé par $\sqrt{B^2+C^2+D^2}$.

—

Planche 8.

